

Bauhaus-Universität Weimar

Fakultät Bauingenieurwesen

Instationäre Wärmeleitung in geschichteten Wänden

Bachelorarbeit

Aufgabenstellung

Ziel der Arbeit ist es, analytische Lösungen für das zeitabhängige Temperaturfeld in einer geschichteten Wand zu berechnen. Dazu sind mittels Trennung der Variablen zunächst Produktlösungen für den Fall variabler, aber glatter, Materialparameter zu bestimmen. Dazu müssen Eigenwertaufgaben für allgemeine Sturm-Liouville Probleme gelöst werden. Auf der Basis der erhaltenen Produktlösungen sind Reihendarstellungen für die Lösung des Dirichletproblems der geschichteten Wand anzugeben. Mit Hilfe dieser analytischen Lösungen ist anschließend das Transmissionsproblem mit stückweise konstanten Materialparametern zu approximieren und an Beispielen zu untersuchen, ob und wenn ja, wie gut die (physikalisch) exakten Übergangsbedingungen am Interface verschiedener Schichten beschrieben werden. Gleichfalls durch Beispiel ist zu untersuchen, wie sich die Anzahl der Summanden in den Partialsummen der erhaltenen Reihen auf die Genauigkeit auswirkt. Hauptgegenstand der Arbeit ist die qualitative Untersuchung der beschriebenen Phänomene und nicht die Effizienz der entwickelten Software.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenstellung	I
Inhaltsverzeichnis	II
Formelzeichen, Einheiten und Indizes	V
1 Motivation	1
2 Grundlagen der Wärmeleitung	3
2.1 Die Wärmeleitungsgleichung	3
2.2 Das Randwertproblem	4
2.3 Stand der Technik	5
2.3.1 Stationärer Fall	5
2.3.2 Instationärer Fall	7
3 Instationäre Wärmeleitung durch einschichtige Wände	9
3.1 Homogene Randbedingungen	10
3.1.1 Superpositionsprinzip	10
3.1.2 Homogene Differentialgleichung	11
3.1.3 Inhomogene Differentialgleichung	14
3.2 Inhomogene Randbedingungen	16
3.2.1 Homogene Differentialgleichung	16
3.2.2 Inhomogene Differentialgleichung	17
4 Instationäre Wärmeleitung durch mehrschichtige Wände	21
4.1 Ansatz mit Übergangsbedingungen	21
4.2 Ansatz mit veränderlichen Koeffizienten	22
4.2.1 Sturm-Liouville-Problem	24
4.2.2 Lösung der Integralgleichung	26
5 Anwendung	31
5.1 Anwendungsmöglichkeiten instationärer Temperaturfelder	31
5.2 Einschichtige Wände	32
5.3 Mehrschichtige Wände	36
5.4 Genauigkeitsanalyse	41
6 Zusammenfassung	44
7 Ausblick	45
8 Anhang	46

Tabellenverzeichnis	51
Abbildungsverzeichnis	52
Literaturverzeichnis	53

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der ausgewiesenen Hilfsmittel angefertigt habe. Sämtliche Stellen der Arbeit, die im Wortlaut oder dem Sinn nach anderen gedruckten oder im Internet verfügbaren Werken entnommen sind, habe ich durch genaue Quellenangaben kenntlich gemacht.

Ort Datum

Vorname Nachname

Formelzeichen, Einheiten und Indizes

Symbol	Einheit	Bedeutung
a	$\frac{m^2}{s}$	Temperaturleitfähigkeit
a_k	—	Koeffizienten einer Potenzfunktion
α	$\frac{W}{m^2 K}$	Wärmeübergangskoeffizient
A	m^2	Fläche
A_k	—	Fourier-Koeffizient
$C_1, C_2 \dots$	—	beliebige Konstanten
c_p	$\frac{J}{kgK}$	spezifische Wärmekapazität
$c_{p,i}, i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{J}{kgK}$	spezifische Wärmekapazität der Schicht i
d	m	Dicke
$d_i, i = 1, 2, \dots, n$	m	Dicke der Schicht i
e	2, 718	Eulersche Zahl
η	—	Schichtübergangsfaktor
$G(x, y)$	—	Green'sche Funktion
Γ	—	Rand
h im Kapitel 2	$\frac{J}{kg}$	spezifische Enthalpie
h im Kapitel 4	m	Abstand zwischen den diskreten Stützstellen
λ	$\frac{W}{mK}$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{W}{mK}$	Wärmeleitfähigkeit der Schicht i
m im Kapitel 2	kg	Masse
m sonst	—	Anzahl der Partialsummenglieder
μ	—	Eigenwerte
n	—	Anzahl der Wandschichten
$\varphi(t)$	$^{\circ}C$	Funktion für die Oberflächentemperatur (auf dem Rand)
\dot{q}	$\frac{W}{m^2}$	Wärmestromdichte
\dot{q}_x	$\frac{W}{m^2}$	Wärmestromdichte in x - Richtung
\dot{q}_T	$\frac{W}{m^2}$	Wärmestromdichte an der Bauteiloberfläche
\dot{Q}	W	Wärmestrom
\dot{Q}_x	W	Wärmestrom in x - Richtung

Symbol	Einheit	Bedeutung
$R_i, i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{m^2 K}{W}$	Wärmedurchlasswiderstand der Schicht i
R_{tot}	$\frac{m^2 K}{W}$	Wärmedurchgangswiderstand
R_{si}	$\frac{m^2 K}{W}$	Wärmeübergangswiderstand innen
R_{se}	$\frac{m^2 K}{W}$	Wärmeübergangswiderstand außen
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte
$\rho_i, i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte der Schicht i
$s_i, i = 1, 2, \dots$	m	Lage der Stützstellen
t	s	Zeit
T	$^{\circ}C$	Temperatur
$T_0(x)$	$^{\circ}C$	Funktion des Temperaturverlaufs zum Zeitpunkt $t = 0$
T_{in}	$^{\circ}C$	Temperatur innen
T_{ex}	$^{\circ}C$	Temperatur außen
$T_{i,start}, i = 1, 2, \dots, n$	$^{\circ}C$	Temperatur am Anfang einer Schicht (in Bezug auf positive x-Achse)
$T_{i,end}, i = 1, 2, \dots, n$	$^{\circ}C$	Temperatur am Ende einer Schicht (in Bezug auf positive x-Achse)
T_{∞}	$^{\circ}C$	Umgebungstemperatur
T_{Γ}	$^{\circ}C$	Oberflächentemperatur (auf dem Rand)
T_{si}	$^{\circ}C$	Oberflächentemperatur innen
T_{se}	$^{\circ}C$	Oberflächentemperatur außen
U	$\frac{W}{m^2 K}$	Wärmedurchgangskoeffizient
$V(t)$		Zeitfunktion der Wärmeleitungsgleichung
$X(x)$		Ortsfunktion der Wärmeleitungsgleichung
x, y, z		Koordinaten

1 Motivation

Die Physik zählt zu den exakten Wissenschaften. Der Ingenieur jedoch ist ein Pragmatiker. Viel zu gerne vereinfacht er, trifft Annahmen oder vernachlässigt. Der Physiker will es hingegen präzise, am besten unendlich oft reproduzierbar. Die Kunst ist die Kombination aus beidem, schließlich sind wenige vom Ingenieur behandelte Fragestellungen nicht physikalischer Natur. Lösungsverfahren bewähren sich erst durch ihre Anwendbarkeit. Steht der Rechenaufwand nicht mehr im Verhältnis zum Nutzen der in Aussicht stehenden Lösung, so wird die Methodik verworfen oder so lange Möglichkeiten zur Annäherung an sie gesucht, bis sich der Aufwand irgendwann rechtfertigen lässt. Der Ingenieur muss dabei mit den Hilfsmitteln, die ihm zur Verfügung stehen, die Konzepte entwerfen. Heutzutage ist mit herkömmlicher Technik schon viel mehr möglich und Probleme, die unter den Tisch gekehrt wurden, weil sie mit gängigen Mitteln nur unter erheblichen Aufwand oder gar nicht zu lösen waren, können auf ihre Lösbarkeit erneut überprüft werden. Die Bauphysik ist eine Wissenschaft, die für solche Verknüpfungen zwischen Physik und Ingenieurwissenschaften Arbeitsweisen entwickeln muss, die genau und anwendbar sind. Ein großes Teilgebiet, vielleicht sogar das umfangreichste in der Bauphysik, ist die Wärmelehre. Die Bedeutung der Interaktion zwischen Gebäuden und äußeren meteorologischen Bedingungen braucht hier vermutlich nicht ausgeführt werden. Wie viele physikalische Prozesse, ist auch der Wärmestrom an gewisse Gesetzmäßigkeiten gebunden. Diese sind bereits alle formuliert und müssen bzw. können nicht neu erfunden werden. Bisher ging man davon aus, dass die Gesetze der Wärmeleitung nur durch Näherung effizient zu erfassen sind und stieg gleich über auf numerische Methoden. Eine lange Zeit hat man sich mit den daraus resultierenden Ergebnissen zufriedengegeben. Jedoch steigt mit wachsenden Anforderung an die Wirtschaftlichkeit und Umweltverträglichkeit der Bedarf an hocheffizienten Bauprodukten. Im Bereich der Forschung und Baustoffentwicklung ist es also von hoher Bedeutung, das exakte wärmetechnische Verhalten von Baumaterialien beurteilen zu können. Nun kann man untersuchen, ob durch moderne Technik und aktuellen Stand des Wissens in anderen Bereichen der Naturwissenschaften Konzeptionen konstruiert werden können, die Probleme des Wärmestroms besser erfassen. Das soll in dieser wissenschaftlichen Arbeit versucht werden. Da natürlich kein Lösungsweg genauer sein kann als ein analytischer, soll es auf diesem Wege versucht werden. Die Wärmeleitung durch Gebäude findet natürlich gleichzeitig durch Wände, Dächer und Erdreich statt. Hierbei soll nur der Wärmestrom durch parallele, unendlich lange und unendlich hohe Wände betrachtet werden. Dabei ist klar, dass die Beanspruchung der Wand von dem äußeren Klima abhängt, welches sich nicht nur über die Jahreszeiten sondern auch im Tag und Nachtwechsel stark ändert. Das hat zur Folge, dass die Wand diese Temperaturänderungen auch mitmacht, weswegen eine instationäre, d.h. zeitabhängige Betrachtung unumgänglich wird. Selbstverständlich wird heutzutage kein Gebäude mehr errichtet, dessen Wände nur aus einer Schicht bestehen. Vielmehr wird eine Reihe aus tragenden, dämmenden und schützenden Schichten mit zweckmäßig verschiedenen thermischen Eigenschaften verbaut. Dementsprechend wird im Folgenden ein besonderer Wert auf die Lösung geschichteter Systeme gelegt, um die Ergebnisse dieser Arbeit auf eine breite Palette an Problemstellungen anwenden

zu können. An dieser Stelle sei bemerkt, dass in der Tat bereits analytische Methoden zur Berechnung von Temperaturfeldern bekannt sind, jedoch nur für einschichtige Wände. Es hat sich als Schwierigkeit herausgestellt, mehrere Bauteilschichten miteinander zu koppeln, da verschiedene Materialien sich in Bezug auf ihr thermisches Verhalten schließlich unterschiedlich verhalten. Diese Herausforderung gilt es anzugehen und zu lösen.

2 Grundlagen der Wärmeleitung

2.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Grundsätzlich kann der Energietransport in Form von Wärme auf drei Arten erfolgen. Zusammen mit elektromagnetischer Strahlung (=Wärmestrahlung), zusammen mit strömenden Fluiden (=Konvektion) oder als Entropieübertragung durch ruhende Materie im molekularen Bereich. Letzteres wird relevant für diese Arbeit und wird als Wärmeleitung bezeichnet. Betrachtet man im ingenieurmäßigen Sinn den horizontalen Wärmestrom durch eine ebene Scheibe zum Beispiel von Innen nach Außen, so wird hierbei nur der Wärmetransport in eine Raumrichtung interessant (siehe Abbildung 2.1).

Pionierarbeit leistete im Jahre 1822 Joseph Fourier mit der nach ihm benannten FOURIERSchen Differentialgleichung

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Sie beschreibt den Zusammenhang der zeitlichen und örtlichen Energieänderung. Demnach ist die zeitlich veränderliche Wärmestromdichte \dot{q}_x gleich dem Temperaturgradienten, welcher mit der Wärmeleitfähigkeit λ skaliert wird. Weiterhin gilt der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{\partial mh}{\partial t} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x}, \quad (2.2)$$

womit die Enthalpieänderung der Differenz zwischen ein- und austretender Wärmeströme entspricht. Der Index hierbei bedeutet Wärmestrom in x-Richtung. Durch Linearisierung des Wärmestroms an der Stelle $x + \Delta x$ mit Hilfe der Taylorentwicklung resultiert

$$\dot{Q}_{x+\Delta x} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \Delta x. \quad (2.3)$$

Wenn für einen isobaren Zustand die Veränderung der spezifischen Wärmemenge gleich der Änderung der spezifischen Enthalpie ist, so erhält man die Beziehung $dh = c_p dT$. Beachtet man zudem noch, dass die Wärmestromdichte als Wärmefluss pro Fläche definiert ist, hat man letztlich mit $\dot{Q}_x = \dot{q}_x \Delta y \Delta z$ und 2.3 die Gleichung

$$mc_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (2.4)$$

Setzt man nun in Gleichung 2.4 die FOURIERSche Beziehung und die Dichte als $\rho = \frac{m}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ ein, gelangt man zum folgenden Ausdruck:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Um weitere Rechnungen zu vereinfachen, fasst man gerne die drei Materialkennwerte zur Temperaturleitfähigkeit $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ zusammen und kann

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

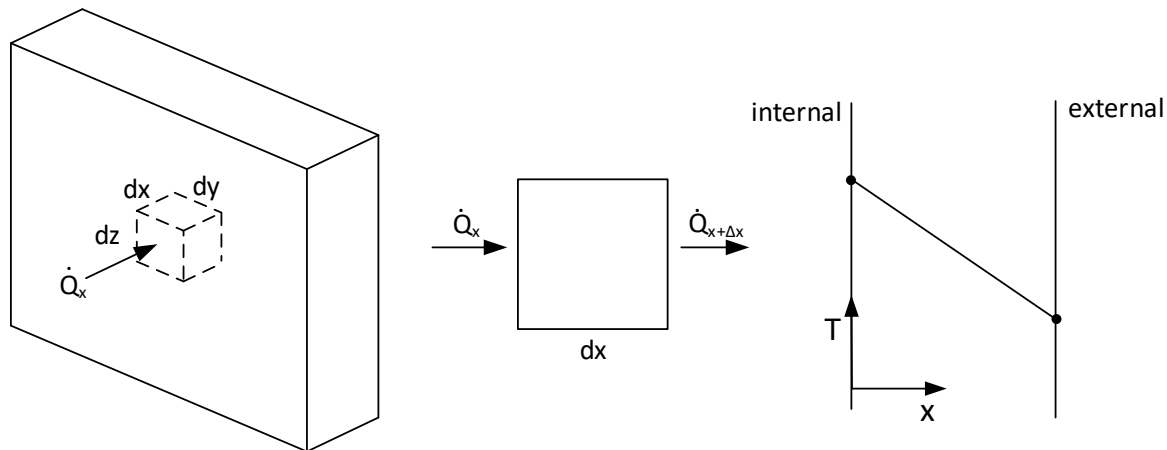


Abbildung 2.1: Horizontaler Wärmestrom in x-Richtung. Links: Differentielles Volumenelement einer ebenen Wand. Mittig: Ein- und austretender Wärmestrom. Rechts: Temperaturverlauf in einer einschichtigen Wand im stationären Fall.

schreiben. Die somit hergeleitete partielle Differentialgleichung 2. Ordnung wird als eindimensionale Wärmeleitungsgleichung bezeichnet und bildet die Grundlage zur Berechnung instationärer Temperaturfelder. [6] [10] Dieser Zusammenhang lässt sich erst auf spezifische Probleme anwenden, wenn sich die Schar an möglichen Lösungen auf eine bestimmte Lösung reduzieren lässt. Realisierbar wird es mit Hilfe von Anfangs- und Randbedingungen. Stationäre Vorgänge benötigen eine Temperaturvorgabe auf dem Rand, kommt noch die Zeitabhängigkeit mit ins Spiel, wird eine Anfangsbedingung zur Beschreibung der Temperaturverteilung an jedem Ort zu einem bestimmten Zeitpunkt (idealerweise zum Zeitpunkt $t = 0$) notwendig. Handelt es sich um eine geschichtete Wand, so werden bei n -Schichten $n - 1$ weitere Übergangsbedingungen benötigt.

2.2 Das Randwertproblem

Bei der Betrachtung des Temperaturverhaltens an Systemgrenzen muss nochmal zwischen drei verschiedenen Arten von Randbedingungen unterschieden werden. Aus zwei Gründen

DIRICHLET Randbedingung	(1.Art)	Vorgabe von Werten auf dem Rand
NEUMANN Randbedingung	(2.Art)	Vorgabe der Normalenableitung auf dem Rand
Gemischte Randbedingung	(3.Art)	Verknüpfung der ersten beiden Randbedingungen.[3]

Tabelle 2.1: Arten von Randbedingungen

wird für die Behandlung des Wärmeleitproblems an der Bauteiloberfläche im Normalfall die Randbedingung 3. Art interessant. Erstens, weil sich damit ein direktes Verhältnis zwischen der Oberflächen- und der Umgebungstemperatur beschreiben lässt. In der Anwendung wird vielleicht, wenn nicht gerade Sensoren an Wänden angebracht werden, eher die Umgebungstemperatur bekannt sein, die zum Beispiel an lokalen Wetterstationen gemessen werden kann. Zweitens hängt der Übergang von einem strömenden Fluid (in dem Fall Luft) in ein festes Medium von dem Material auf der Außen- bzw. Innenseite ab.

Dieses materialspezifische Verhalten kann erfasst werden, indem der Wärmeübergangskoeffizient α eingeführt und beim Aufbringen der Randbedingungen berücksichtigt wird. Über den Wärmeübergangswiderstand können Einflüsse wie

- Konvektion
- Intensität der Belüftung
- Richtung des Wärmestroms
- Windgeschwindigkeit
- Oberflächenalterung
- Staubansammlung

erfasst werden.[2] Bei der Randbedingung 3. Art findet das NEWTON'sche Abkühlungsgesetz

$$q_{\Gamma} = \alpha(\dot{T}_{\Gamma} - T_{\infty}) \quad (2.7)$$

ihre Anwendung, wenn es mit Gleichung 2.1 kombiniert wird. [6]

$$\alpha(T_{\Gamma} - T_{\infty}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\Gamma} \quad (2.8)$$

Interpretiert man die Randbedingung 3. Art aus bauphysikalischer Sicht, dann ist die aus dem Bauteil durch Leitung fließenden Wärmestromdichte gleich der durch Wärmeübergang in die Umgebung fließende Wärmestromdichte. Letztere ist der Temperaturdifferenz zwischen Oberfläche und Umgebung proportional. Ingenieurtechnisch bedeutet dies ein auf dem Rand vorgeschalteter Wärmewiderstand. Aus mathematischer Sichtweise - die Vorgabe einer Linearkombination aus Temperatur und Temperaturgradient auf dem Rand.

2.3 Stand der Technik

2.3.1 Stationärer Fall

Wärmeleitvorgänge, die zeitunabhängig verlaufen, werden als stationär bezeichnet. Ein stationärer Fall reduziert die Wärmeleitungsgleichung auf die LAPLACE-Gleichung durch Wegfall der Zeitableitung.

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta T && \text{(allgemeine LAPLACE-Gleichung)} \\ 0 &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} && \text{(eindimensionale LAPLACE-Gleichung)} \end{aligned}$$

Einschichtige Wände

Integriert man zwei mal die eindimensionale LAPLACE-Gleichung nach x , so erhält man die lineare Funktion für einen Temperaturverlauf

$$T(x) = C_1x + C_2, \quad (2.9)$$

welche nach Anwendung der Randbedingungen 1. Art

$$T(x = 0) = T_{si} \quad (2.10)$$

$$T(x = d) = T_{se} \quad (2.11)$$

die Lösung für ein spezielles Problem

$$T(x) = \frac{(T_{se} - T_{si})}{d}x + T_{si} \quad (2.12)$$

in Abhängigkeit der Wanddicke und der Oberflächentemperaturen liefert.[6]

Mehrschichtige Wände

Die DIN EN ISO 6946 schlägt zwei Verfahren vor, wie thermische Kennwerte von geschichteten Wänden ermittelt werden können. Einmal das "Detaillierte Berechnungsverfahren" durch numerische Simulation, das bei komplexeren Bauteilgeometrien zu besseren bzw. überhaupt zu Ergebnissen führt. Zum anderen das "Vereinfachte Berechnungsverfahren". Letzteres wird hier kurz eingeführt. Der Grundgedanke hierbei ist die Annahme, dass die separaten homogenen Schichten als in Reihe geschaltete Wärmewiderstände betrachtet werden können, ganz analog zur Gleichstromtheorie. Weiterführend können sogar die Wärmeübergänge zwischen Bauteiloberfläche und der Umgebung als zusätzliche Widerstandskomponenten aufgefasst werden. Die Summe aus den reziproken Wärmedurchlass- und Wärmeübergangswiderständen ergeben den Wärmedurchgangskoeffizienten, welcher das maßgebende Bewertungskriterium der Wand hinsichtlich der thermischen Isolierung darstellt.

$$U = \frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_{si}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_{se}} \quad (2.13)$$

Da schließlich der Gradient der Temperatur nichts anderes als ihr Anstieg ist, kann das FOURIER'sche Gesetz 2.1 über die Bauteildicke linearisiert werden:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \lambda \frac{(T_{in} - T_{ex})}{d} \quad (2.14)$$

Wie bereits erwähnt, kann nun das OHM'sche Gesetz herangezogen werden, um entsprechend der elektrischen Stromstärke auch den Wärmestrom als Potentialdifferenz pro Widerstand zu definieren.

$$\dot{Q} = \underbrace{\frac{\lambda A}{d}}_{=\frac{1}{R_{tot}}} (T_{in} - T_{ex}) \quad (2.15)$$

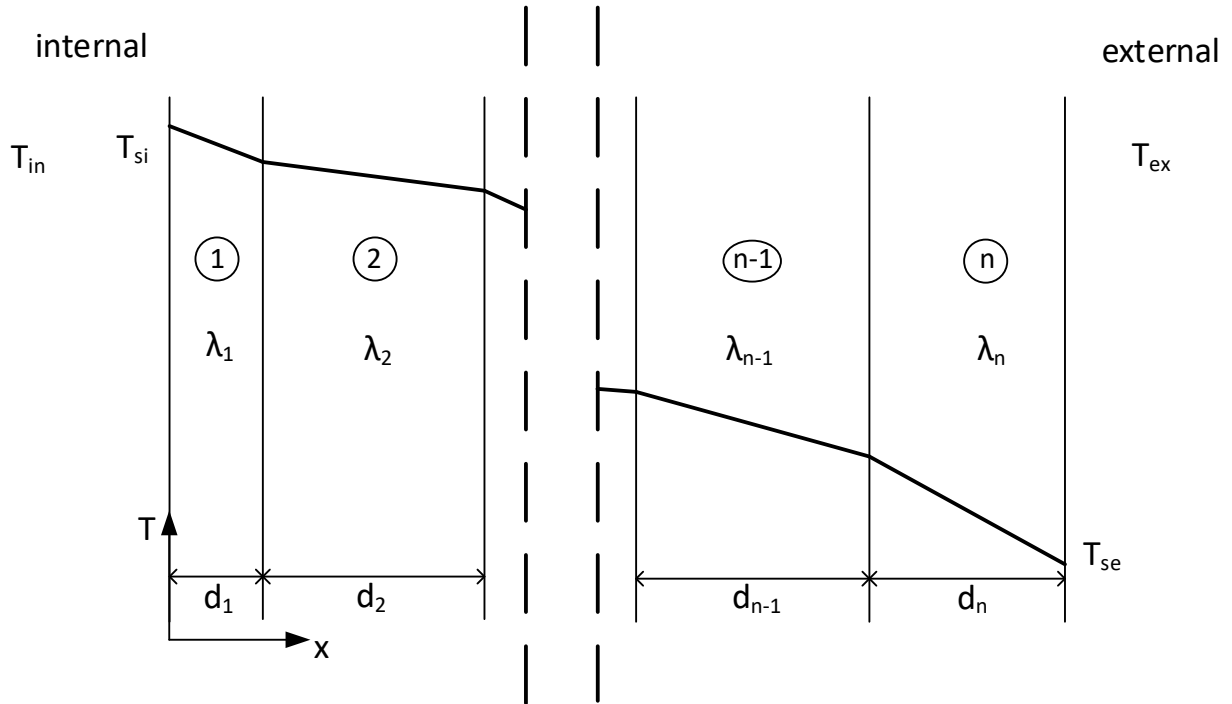


Abbildung 2.2: Temperaturverlauf in einer n -schichtigen Wand im stationären Fall

Nimmt man eine normative Fläche (mit dem Wert $1m^2$) an, so ist die Definition des Wärmedurchlasswiderstandes einer Wandschicht,

$$R_i = \frac{d_i}{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

wie sie in der Norm steht, hergeleitet. Den Erwartungen entsprechend wird der Widerstand größer, umso dicker die Bauteilschicht und umso schlechter ihre Wärmeleitfähigkeit ist. Was für die Wand als ganzes gilt, muss natürlich auch für gesonderte Schichten gelten, sodass der durch ein Wandelement fließende Wärmestrom der zugehörigen Temperaturdifferenz geteilt durch ihren Wärmedurchlasswiderstand entspricht.

$$\dot{Q} = \frac{T_{i,start} - T_{i,end}}{R_i} \quad (2.17)$$

Nach Kombination der Gleichungen 2.15 und 2.17 wird die Temperatur an jeder Schichtgrenze unter Berücksichtigung der Übergangswiderstände berechenbar. [6][2]

$$T_{i,end} = T_{i,start} + U(T_{in} - T_{ex})R_i \quad (2.18)$$

2.3.2 Instationärer Fall

Möchte man eine dynamisch-thermische Analyse eines geschichteten Bauteils vornehmen, hat man nach dem Eurocode prinzipiell immer die Möglichkeit eine numerische Simulation durchzuführen, sei es die Finite-Elemente- oder die Finite-Differenzen-Methode. Sie bieten den Vorteil inhomogene Wände, Kanten und Öffnungen besser oder überhaupt erfassen zu können. Der Ansatz hierbei ist die Darstellung der Temperatur- und Wärmestromschwankungen als eine zyklische, sinusförmige Funktion in Abhängigkeit von der

Zeit und des langfristigen Durchschnittswertes. Durch Übergangsmatrizen wird die dynamische Wärmeaufnahme berechnet. Sie beschreibt das Verhältnis der Amplitude der Wärmestromdichte der Oberfläche an Seite 1 zur Temperaturamplitude an der Oberfläche von Seite 2, wenn die Temperatur an Seite 1 konstant gehalten wird. Prinzipiell kann man Aussagen über die Relation der Umgebungs- und der Innenraumtemperatur bzw. Wärmestromdichte treffen. Man muss lediglich Angaben zu den Materialeigenschaften machen, die direkt durch die Wahl des Wandaufbaus gegeben sind, sowie zur Periodendauer der Wärmequelle, welche man betrachten möchte. Der Vorteil ist natürlich die einfache Handhabung und der relativ geringe Rechenaufwand. Der Nachteil ist die Beschränktheit der Randbedingungen, welche sinusförmig aufgebracht werden müssen. Natürlich könnte man die Temperaturschwankungen als Fourierreihe entwickeln, aber sie muss dann immer noch periodisch sein. Die Ungenauigkeit die man begeht, wenn man die klimatischen Veränderungen als periodisch annimmt, könnte allerdings ziemlich groß sein. [8]

3 Instationäre Wärmeleitung durch einschichtige Wände

Die nächsten zwei Kapitel sollen zeigen wie Lösungen auf Basis mathematischer Methoden aus dem Bereich der linearen Algebra und der Analysis aussehen könnten. Vorerst sollen in diesem Kapitel hinreichende Grundlagen geschaffen werden, um sie im Nächsten mit geeigneten Ansätzen auf geschichtete Wände zu übertragen.

Betrachtet wird der eindimensionale Wärmestrom auf eine unendlich lange, aus einem homogenen Material bestehende Wand mit kontinuierlich gleicher Dicke. Entfernt man sich weg von dem stationären Zustand und lässt nun zeitveränderliche Randbedingungen zu, so gelangt man zur homogener partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

wie sie bereits hergeleitet wurde. Ist die rechte Seite ungleich Null, so spricht man von einer inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (3.2)$$

wobei f eine beliebige stetige Funktion darstellen kann. Aus physikalischer Sicht kann f als eine Wärmequelle- bzw. senke, die zum Zeitpunkt t an dem Ort x wirkt, interpretiert werden. Die inhomogene Differentialgleichung könnte für viele Anwendungsfälle interessant werden. Betrachtet man beispielsweise die Hydratation des Betons, wobei während der ersten Stunde nach dem Betonieren in der Phase des Ansteifens und während den darauf folgenden zwölf Stunden des Erstarrens kontinuierlich Wärme abgegeben wird.[11] Wenn man bedenkt, dass die Hydratation selbst temperaturabhängig ist und durch höhere Temperaturen beschleunigt wird, so wird man einsehen, dass starke Fluktuation der Außentemperatur möglicherweise einen Einfluss auf den Vorgang des Erstarrens oder des Erhärtens haben könnte. Man kann auch so weit gehen und behaupten, dass aus genau berechnetem Wärmehalt in der Wand Rückschlüsse auf die voraussichtliche Qualität der Erhärtung gezogen werden können. Ein anderes Anwendungsbeispiel für inhomogene Wärmeleitungsgleichungen sind die sogenannten "phase change materials"(PCM) oder auch Latentwärmespeicher. Hierbei wird die Wärme ausgenutzt, die bei der Phasenumwandlung des Stoffes frei bzw. absorbiert wird. Beim Schmelzen des Mediums kann viel Wärmeenergie in Form von Schmelzenergie aufgenommen und gespeichert werden, beim Erstarren geben die Körper kontinuierlich wieder jene Wärmemenge ab. Das geht natürlich nur, wenn die "latente Schmelzwärme oder Absorptionswärme wesentlich größer ist als die Wärme, die sie aufgrund ihrer normalen spezifischen Wärmekapazität (ohne den Phasenumwandlungseffekt) speichern kann." Weitere Anwendungen sind unter anderem Fußbodenheizungen, Wandheizungen oder Kühldecken.[13] Wie genau jedoch der inhomogene Anteil von Gleichung 3.2 aussehen sollte, um die Anwendungsfälle realistisch abzubilden, kann Gegenstand künftiger Forschung sein.

Wie bereits erwähnt, wird die Lösung einer Differentialgleichung hauptsächlich durch ihre Rand- und Anfangsbedingungen bestimmt. Tabelle 3.1 zeigt, dass Rand- und Anfangsbedingungen auch als homogen bezeichnet werden können, wenn der Wert bzw. die Ableitung am Rand gleich Null ist. In der Anwendung mag dieser Fall zwar nicht interessant sein, jedoch wird er später benötigt um inhomogene Randbedingungen, also von Null verschiedene Werte am Rand, zu verarbeiten. An dieser Stelle wird das Ziel dieser Arbeit deutlich: Wenn man es schafft eine von der Zeit abhängige Funktion auf dem Rand vorzugeben, welche zum Beispiel die Außentemperatur widerspiegeln soll, so erhält man eine Gleichung $T(x,t)$, die den zeitlich und örtlich veränderlichen Temperaturverlauf in der Wand beschreibt. Idealerweise sollten Randbedingungen 3. Art verwendet werden, wenn man die Außentemperatur ansetzen will, da der Wärmeübergang von Umgebung auf die Oberfläche nicht vernachlässigt werden kann. Diese Arbeit behandelt hauptsächlich Randbedingungen 1. Art (DIRICHLET - Randbedingungen), also eine Temperaturvorgabe auf der Oberfläche.

	<u>homogen</u>		<u>inhomogen</u>	
	DIRICHLET	NEUMANN	DIRICHLET	NEUMANN
Randbedingungen:	$T(0, t) = 0$	$T'(0, t) = 0$	$T(0, t) = \varphi_1(t)$	$T'(0, t) = \tilde{\varphi}_1(t)$
	$T(d, t) = 0$	$T'(d, t) = 0$	$T(d, t) = \varphi_2(t)$	$T'(d, t) = \tilde{\varphi}_2(t)$
Anfangsbedingung:	$T(x, 0) = 0$	$T(x, 0) = 0$	$T(x, 0) = T_0(x)$	$T(x, 0) = \tilde{T}_0(x)$

Tabelle 3.1: homogene und inhomogene Randbedingungen

Um zur allgemeinen Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung mit inhomogenen Rand- und Anfangsbedingungen zu gelangen, müssen vorerst noch einige Umwege gegangen werden.

3.1 Homogene Randbedingungen

3.1.1 Superpositionsprinzip

Die weiteren Überlegungen setzen gewisse Grundkenntnisse über die Superpositionseigenschaft von linearen Differentialgleichungen voraus. Das Superpositionsprinzip macht zwei für diese Arbeit fundamentale Aussagen:

1. Die Linearkombinationen von Lösungen homogener linearen Gleichungen ergeben auch wieder Lösungen der Gleichungen.
2. Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Randwertproblems lässt sich durch eine Summe der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung des inhomogenen Randwertproblems darstellen. [14]

3.1.2 Homogene Differentialgleichung

Randbedingung 1. Art

Zur Lösung partieller Differentialgleichungen wird prinzipiell der Separationsansatz angewandt. Die Idee ist, die Veränderlichen durch ein Produkt von einander zu trennen, um sie später separat von einander als gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten zu können. Zum Schluss werden die Lösungen miteinander wieder multipliziert. Die Ausgangssituation ist also die Differentialgleichung 3.1 mit DIRICHLET Randbedingungen. Man wendet den Produktansatz

$$T(x, t) = X(x) \cdot V(t) \quad (3.3)$$

an und setzt den Ausdruck in 3.1 ein. Durch Division durch 3.3 lässt sich die Gleichung so umformen, dass die Orts- und Zeitfunktion auf getrennten Seiten stehen: ¹

$$aX''V - XV' = 0 \quad (3.4)$$

$$a \frac{X''}{X} - \frac{V'}{V} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{a} \frac{V'}{V} = \frac{X''}{X} = \text{konst.} = -\mu^2 \quad (3.6)$$

Wie gewollt, besitzt die linke Seite nur Abhängigkeiten von t und die rechte Seite nur von x . Damit die Seiten gleichzusetzen sind, müssen sie beide eine Konstante ergeben, womit man sofort eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ortsfunktion $X(x)$ erhält:

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \quad (3.7)$$

Damit kann ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$X(x) = C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x) \quad (3.8)$$

konstruiert werden. Nach Aufbringen der Randbedingungen $X(0) = 0$ und $X(d) = 0$ entfällt sofort die Konstante C_2 und es steht da

$$0 = C_1 \sin(\mu d). \quad (3.9)$$

Diese Gleichung ist immer dann erfüllt, wenn $\mu d = k\pi$ für alle $k = 1, 2, \dots$ wird, wobei $k = 0$ wegen 3.6 ausdrücklich ausgeschlossen ist. Es folgt also direkt

$$-\mu^2 = -\left(\frac{k\pi}{d}\right)^2. \quad (3.10)$$

Man sieht also, dass es unendlich viele Ortsfunktionen gibt, die die Randbedingungen erfüllen. Hat man die gemeinsame Konstante definiert, lässt sich die Zeitfunktion

$$\frac{1}{a} \frac{V'}{V} = -\mu^2 \quad (3.11)$$

als

$$V(t) = C_3 e^{-\mu^2 a t} = C_3 e^{-\frac{k^2 \pi^2}{d^2} a t} \quad (3.12)$$

¹Dabei handelt es sich bei der Ableitung von X immer um eine Ableitung nach dem Ort und bei V immer um eine nach der Zeit.

formulieren, um mit ihr die Separation wieder rückgängig zu machen. Nach dem Superpositionsprinzip ist die Summe von Lösungen einer Differentialgleichung wieder eine Lösung. Folglich kann man die allgemeine Lösung als Linearkombination aller möglichen Lösungen

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{d^2}at} \quad (3.13)$$

darstellen.² Durch Aufbringen der Anfangsbedingung

$$T(x, 0) = T_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \quad (3.14)$$

erhält man die Fourierkoeffizienten

$$A_k = \frac{2}{d} \int_0^d T_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) dx \quad (3.15)$$

und mit ihnen ist der Temperaturverlauf vollständig bestimmt. Die Probe durch Einsetzen in 3.1 ergibt Null und somit ist das Ergebnis korrekt.

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse soll hier ein kurzes Beispiel vorgerechnet werden. Gewählt wird eine $1m$ starke Betonschicht, welche über eine unendlich lange Zeit einer Temperatur von $20^\circ C$ auf der einen Seite und $15^\circ C$ auf der anderen Seite ausgeliefert war. Man nimmt an, dass die Temperatur beidseitig schlagartig einen Sprung auf das Nullniveau macht, was nichts anderem entspricht als einer Anfangsbedingung $T_0(x) = -5x + 20$ und den homogenen DIRICHLET- Randbedingungen. Durch Abschneiden der Fourierreihe nach der m -ten Partialsumme ergeben sich über die Betonschichtdicke folgende Temperaturverläufe für verschiedenes m :

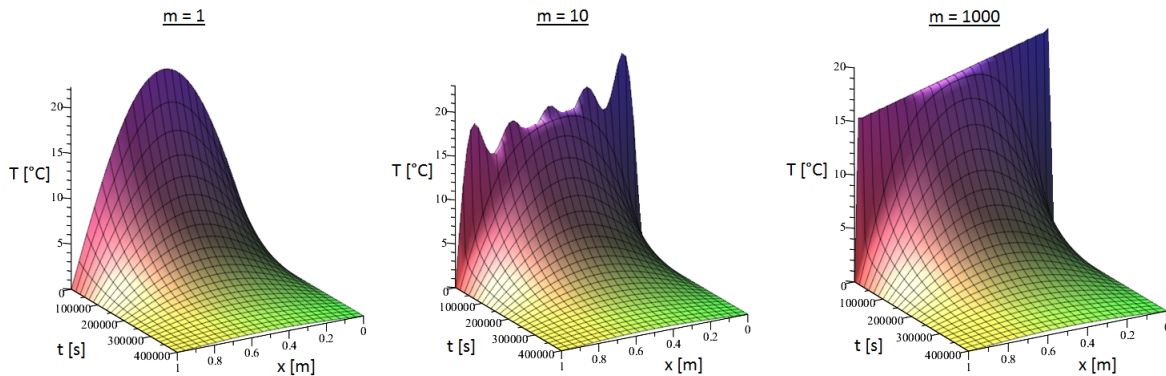


Abbildung 3.1: homogene DIRICHLET- Randbedingungen

Zuallererst fällt natürlich auf, dass die Anzahl der Reihenglieder einen erheblichen Einfluss auf die Darstellung des Anfangszustandes hat, jedoch keinen wesentlichen Einfluss auf das Abklingen der Funktion auf ein konstantes Null- Level. Die Randbedingungen sind, wie man es erwarten würde, in jedem Fall und zu jedem Zeitpunkt eingehalten. Bauphysikalisch interpretiert man einen Angleich des Temperaturverlaufes im Bauteil an die umgebenden Temperaturen innerhalb von etwa $400000s$ ($\approx 4,6 d$).

²Die Konstanten aus V und X werden zusammengefasst

Randbedingung 2. Art

Ganz analog zu DIRICHLET- Randbedingungen verfährt man auch mit NEUMANN- Randbedingungen. Nur muss man statt der Gleichung 3.8 ihre Ableitung

$$X'(x) = C_1\mu\cos(\mu x) - C_2\mu\sin(\mu x) \quad (3.16)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen $X'(0) = 0$ und $X'(d) = 0$ belegen. Dieses Mal entfällt C_1 und

$$0 = -C_2\mu\sin(\mu d) \quad (3.17)$$

ist zu analysieren. Man sieht, dass sich an 3.10 bis 3.12 nichts ändert. Für die Linearkombination folgt:

$$T(x, t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \cdot e^{-\frac{k^2\pi^2}{d^2}at} \quad (3.18)$$

und aus der Anfangsbedingung

$$T_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \quad (3.19)$$

die Fourierkoeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{d} \int_0^d T_0(x) dx \quad (3.20)$$

und

$$A_k = \frac{2}{d} \int_0^d T_0(x) \cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right) dx. \quad (3.21)$$

Für diese Ergebnisse wird es schon deutlich schwieriger praktische Beispiele zu finden, da man nun nicht mehr die Randtemperatur, sondern ihren Anstieg am Rand reguliert. Letztlich kann man aber am oberen Beispiel mit geeigneten grafischen Darstellungen wieder folgende Erkenntnisse gewinnen. Die Betonwand wurde in der Art und Weise thermisch beansprucht, dass sich eine Anfangstemperaturverteilung von $T_0(x) = -5x^2 + 20$ ergeben hat.

Es ist zu sehen, dass nach einer gewissen Zeit sich ein konstanter Temperaturverlauf einstellt, sodass der Anstieg an den Rändern eliminiert wird. Das bedeutet nichts anderes, als dass die Wand, nach einstellen der Anfangsverteilung, schlagartig am Rand perfekt isoliert wird. Wenn keine Wärme mehr rein oder raus kommt (Anstieg gleich Null), wird sich die im Beton gespeicherte Wärmemenge langsam gleichmäßig in der Wand verteilen. Die Temperatur nach unendlich langer Zeit wird also genau dem Integral über der Anfangsverteilung

$$\int_0^d T_0(x) dx \quad (3.22)$$

entsprechen. In dem Fall gleich $18, \bar{3}^\circ\text{C}$.

Abschließen sei vielleicht noch erwähnt, dass die Wärmeleitungsgleichung natürlich auch für jede Kombination aus Randbedingungen lösbar ist. Also auf der einen Seite NEUMANN- und auf der anderen DIRICHLET- Randbedingungen. Das stellt aber keine neuen Erkenntnisse bereit, also wird es in dieser Arbeit nicht weiter aufgegriffen.

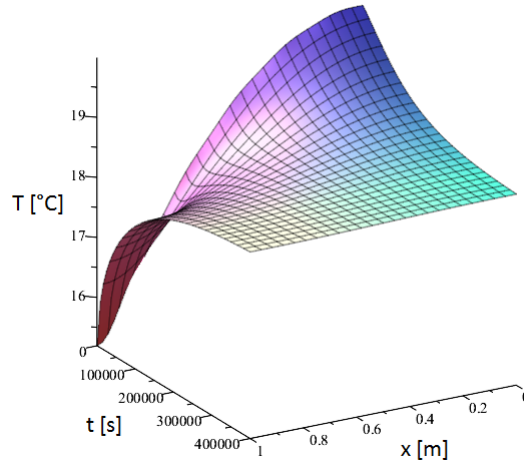


Abbildung 3.2: homogene NEUMANN- Randbedingungen

3.1.3 Inhomogene Differentialgleichung

Mit diesen Resultaten ist man nun in der Lage die Gleichung 3.2 zu lösen. Auf Grundlage von DIRICHLET- Bedingungen startet man mit 3.13 und ersetzt den zeitabhängigen Anteil zusammen mit dem Fourierkoeffizienten durch eine Funktion

$$V_k(t) = A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{d^2} at} \quad (3.23)$$

und setzt die daraus folgende Temperaturfunktion

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{d} x\right) \quad (3.24)$$

in die Differentialgleichung 3.2 ein. Man erhält folgenden Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} V'_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{d} x\right) + a \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \frac{\pi^2 k^2}{d^2} \sin\left(\frac{k\pi}{d} x\right) = f(x, t), \quad (3.25)$$

welchen man durch das Zusammenfassen der Summen problemlos in

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left[V'_k(t) + V_k(t) a \frac{\pi^2 k^2}{d^2} \right]}_{f_k(t)} \sin\left(\frac{k\pi}{d} x\right) = f(x, t) \quad (3.26)$$

überführen kann. Da der Klammerausdruck wieder nur von der Zeit abhängt, lässt er sich zur Funktion $f_k(t)$ komprimieren. An der Stelle ist leicht ersichtlich, dass die Funktion $f_k(t)$ der Fourierkoeffizient von $f(x, t)$ ist. Also gilt:

$$V'_k(t) + V_k(t) a \frac{\pi^2 k^2}{d^2} = \frac{2}{d} \int_0^d f(\xi, t) \sin\left(\frac{k\pi}{d} \xi\right) d\xi \quad (3.27)$$

Nun steht man vor dem Problem, dass die linke Seite der Gleichung die erste und die „nullte“ Ableitung der Zeitfunktion enthält. Letztere lässt sich beseitigen, indem in Gleichung 3.23 A_k durch $A_k(t)$ ersetzt und die Produktregel angewandt wird. Die Terme mit der Ableitung 0-ter Ordnung heben sich auf und es ergibt

$$A'_k(t) = f_k(t) e^{a \frac{\pi^2 k^2}{d^2} t} \quad (3.28)$$

durch beidseitige Integration und einsetzen in 3.24 ergibt sich:

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_k(\tau) e^{a \frac{k^2 \pi^2}{d^2} \tau} d\tau + C_k \right] \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) e^{-a \frac{\pi^2 k^2}{d^2} t} \quad (3.29)$$

Im Falle dass die Anfangsbedingung ebenfalls homogen ist, also

$$T(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) = 0, \quad (3.30)$$

wird die Konstante $C_k = 0$. Die Probe geht auf, also ist 3.29 Lösung von 3.2. Nur noch eine Schwierigkeit tritt auf, nämlich erzeugt man durch den Ansatz bei 3.28 einen positiven Exponenten in der e-Funktion. Bisher musste man sich keine Gedanken über die Berechenbarkeit machen, weil ein negativer Exponent eine kleine Zahl erzeugt. Da in der Regel für die Zeit t recht große Zahlen eingesetzt werden, wie man es zum Beispiel in Abbildung 3.2 beobachten kann, und die e-Funktion einer großen Zahl eine unverhältnismäßig größere ergibt, kommt man schnell an die Grenzen der Rechenleistung herkömmlicher Programme. Man kann sich an der Stelle jedoch behelfen, indem man die beiden e-Funktionen in 3.29 in der Form

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_k(\tau) e^{-a \frac{k^2 \pi^2}{d^2} (t-\tau)} d\tau \right] \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \quad (3.31)$$

zusammenfasst. An einem Beispiel lässt sich vielleicht besser die Rolle des inhomogenen Anteils $f(x, t)$ erkennen. Man betrachtet wieder die 1m starke Betonwand und setzt beispielhaft $f(x, t) = 1$, d.h. ohne Zeit- oder Ortsabhängigkeiten. So wird die Temperaturverteilung mit unendlich vielen Partialsummen aus dem Nullzustand (= Anfangswert) nach einer Sekunde überall, außer an den Rändern, den Wert der Wärmequellenfunktion $f(x, t)$ also 1°C annehmen (siehe Abbildung 3.3). Die Temperatur wird mit der Zeit dann weiter über den Wert 1 hinaussteigen. Würde man die Wärmequelle von t und x abhängig machen, stiege dann die Temperatur nicht mehr gleichmäßig auf den gewünschten Wert und der Verlauf über die Dicke wäre auch nicht mehr konstant. Im Bild 3.3 ist zusehen, dass die Anzahl der Summenglieder erheblichen Einfluss auf die Qualität der Wärmequellenausprägung ausübt.

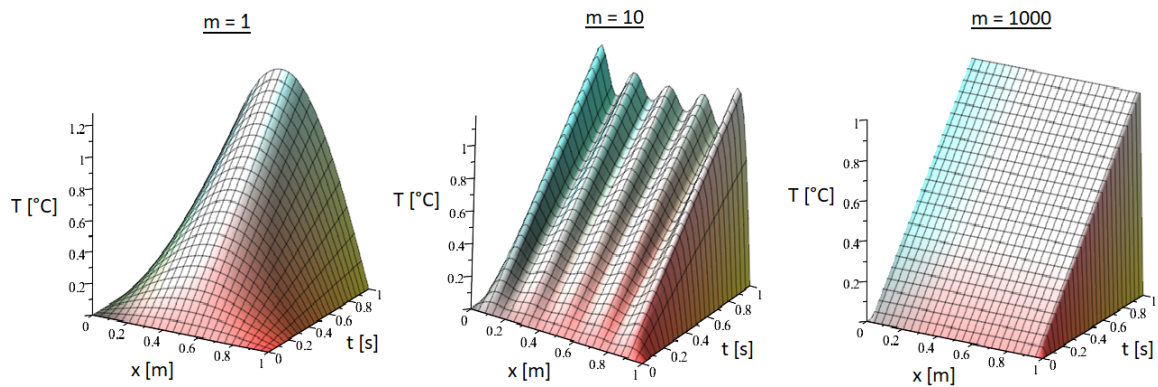


Abbildung 3.3: Wärmequelle

3.2 Inhomogene Randbedingungen

Auf Grund der Tatsache, dass homogene Randbedingungen für die Anwendung meist nutzlos sind, ist es von hoher Notwendigkeit nun auch veränderliche Randwerte zuzulassen.

3.2.1 Homogene Differentialgleichung

Die Ausgangssituation ist Gleichung 3.1 mit inhomogenen DIRICHLET- Randbedingungen. Auf Grund dieser Inhomogenität ist es nicht mehr so leicht eine Lösung für dieses Problem zu finden, was einen kleinen Umweg verlangt. Zur Beschreibung und Visualisierung des folgenden Verfahrens ist die Abbildung 3.4 hilfreich. Dabei wird veranschaulicht wie eine Lösung, wie sie in Block A steht, nach Ausführung einiger Rechenoperationen gefunden werden kann.

Dies beginnt damit eine lineare Funktion aufzustellen, sie wird im Folgenden $T_p(x)$ genannt, welche die gewünschten Randbedingungen φ_1 und φ_2 erfüllt. Also

$$T_p(x, t) = \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{d} x + \varphi_1(t) \quad (3.32)$$

und demzufolge eine Anfangstemperaturverteilung von

$$T_p(x, 0) = \frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{d} x + \varphi_1(0) \quad (3.33)$$

aufweist. Diese Funktion soll gleichzeitig die Lösung der Differentialgleichung, wie sie in Block B steht, darstellen. Setzt man $T_p(x, t)$ in die linke Seite ein, so wird man schnell einsehen, dass die rechte Seite nicht Null wird, sondern:

$$\tilde{f} = \frac{\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t)}{d} x + \dot{\varphi}_1(t) \quad (3.34)$$

Nun versucht man die Ausgangsdifferentialgleichung 3.1 mit inhomogenen Rand- und Anfangsbedingungen in eine inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen zu überführen. Das gelingt auch, und zwar indem man System B von System A abzieht. Dies ist natürlich auf Grund der Linearität zugelassen. Es hat direkt zur Folge, dass die inhomogenen Randbedingungen verschwinden und sich eine rechte Seite einstellt und zwar genau $-\tilde{f}$. Die Differentialgleichung die sich nun ergeben hat, im Folgenden T_v genannt (siehe Block C), gilt es nun zu lösen. Es ist zu beachten, dass die Anfangswertbedingung nicht homogen ist und somit nicht direkt über das Verfahren aus Kapitel 3.1.3 gelöst werden kann. Dazu muss man erst von einer Charakteristik linearer Gleichungen Gebrauch machen, und zwar der Superpositionseigenschaft. Man überlagert eine Lösung die die rechte Seite von T_v aber keine Anfangsfunktion besitzt (siehe Block E) mit einer Lösung die die Anfangsfunktion von T_v aber keine rechte Seite besitzt (siehe Block D). Ist T_v jetzt bekannt, braucht man nichts weiter tun als die zuvor abgezogene Lösung T_p einfach wieder hinzuzurechnen. Das Resultat ist die Lösung einer homogenen Differentialgleichung mit den Randfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ und der Anfangsfunktion $T_0(x)$. Die allgemeine Form der Lösung ist im Anhang 8 hinterlegt.

Zur Verifizierung des Ergebnisses setzt man 8.1 in Gleichung 3.1 ein und schaut ob Null herauskommt. Dies ist der Fall, also unterwirft sich die hergeleitete Gleichung den Gesetzen der Wärmeleitung. Jetzt kann man sich wieder die Betonwand anschauen. Gewählt ist wieder die Anfangsbedingung $T_0(x) = -5x + 20$ und die veränderlichen Randbedingungen

$\varphi_1(t) = \frac{1}{30000}t + 20$ und $\varphi_1(t) = \frac{1}{40000}t + 15$. Die Randfunktionen wurden so bestimmt, dass sie gleichmäßig steigen, jedoch an den Rändern unterschiedlich und nach ca. 5 Tagen noch im realistischen Bereich liegen, um einen ersten Eindruck von der Funktionsweise von zeitabhängigen Randwerten zu erlangen. Gleichzeitig sind zum Zeitpunkt $t = 0$ Rand- und Anfangsbedingungen identisch, womit Störungen aus der Anfangsbedingung vermieden werden.

Man sieht in Abb. 3.5, dass auch wenn die Randtemperaturen linear über der Zeit sind, die Temperaturverteilung in der Wand nicht linear ist. Hier sieht man die Grenzen der stationären Berechnungsmethoden, wo angenommen wird, dass die Temperatur ebenfalls linear verläuft. Die Nichtlinearität lässt sich anhand der „thermischen Trägheit“ der Wand oder genauer gesagt der Temperaturleitfähigkeit begründen. Die Wand braucht einige Zeit, um sich den Randbedingungen anzupassen.

Was so schön für Dirichlet- Randbedingungen funktioniert, geht gleichermaßen für NEUMANN'sche Randbedingungen. Hierbei muss natürlich eine andere Gleichung für $T_p(x, t)$ gefunden werden. Wenn man auf den Rändern die Ableitungen $T'(0, t) = \tilde{\varphi}_1(t)$ und $T'(d, t) = \tilde{\varphi}_2(t)$ vorgibt, so muss $\tilde{T}_p(x, t)$ die Form

$$\tilde{T}_p(x, t) = \tilde{\varphi}_1(t)x + \frac{x^2}{2d}(\tilde{\varphi}_2(t) - \tilde{\varphi}_1(t)) \quad (3.35)$$

annehmen. Alles weitere verläuft ganz analog zum DIRICHLET- Problem.

3.2.2 Inhomogene Differentialgleichung

Jetzt bleibt nur noch übrig, den letzten und allgemeinen Fall zu untersuchen, wenn sowohl die partielle Differentialgleichung als auch die Randbedingungen inhomogen sind. Das heißt, man hat es hier mit veränderlichen Temperaturen auf der Wandoberfläche sowie auch mit einer Wärmequelle- oder senke zu tun. der Aufwand hier bleibt jedoch überschaubar. Wenn der Ausgangspunkt Gleichung 3.2 ist, braucht man nichts weiter tun, als die Lösung der homogenen Differentialgleichung aus Block A mit der inhomogenen Differentialgleichung, die sich im Unterkapitel 3.1.3 ergeben hat, zu überlagern (siehe Abbildung 3.6).

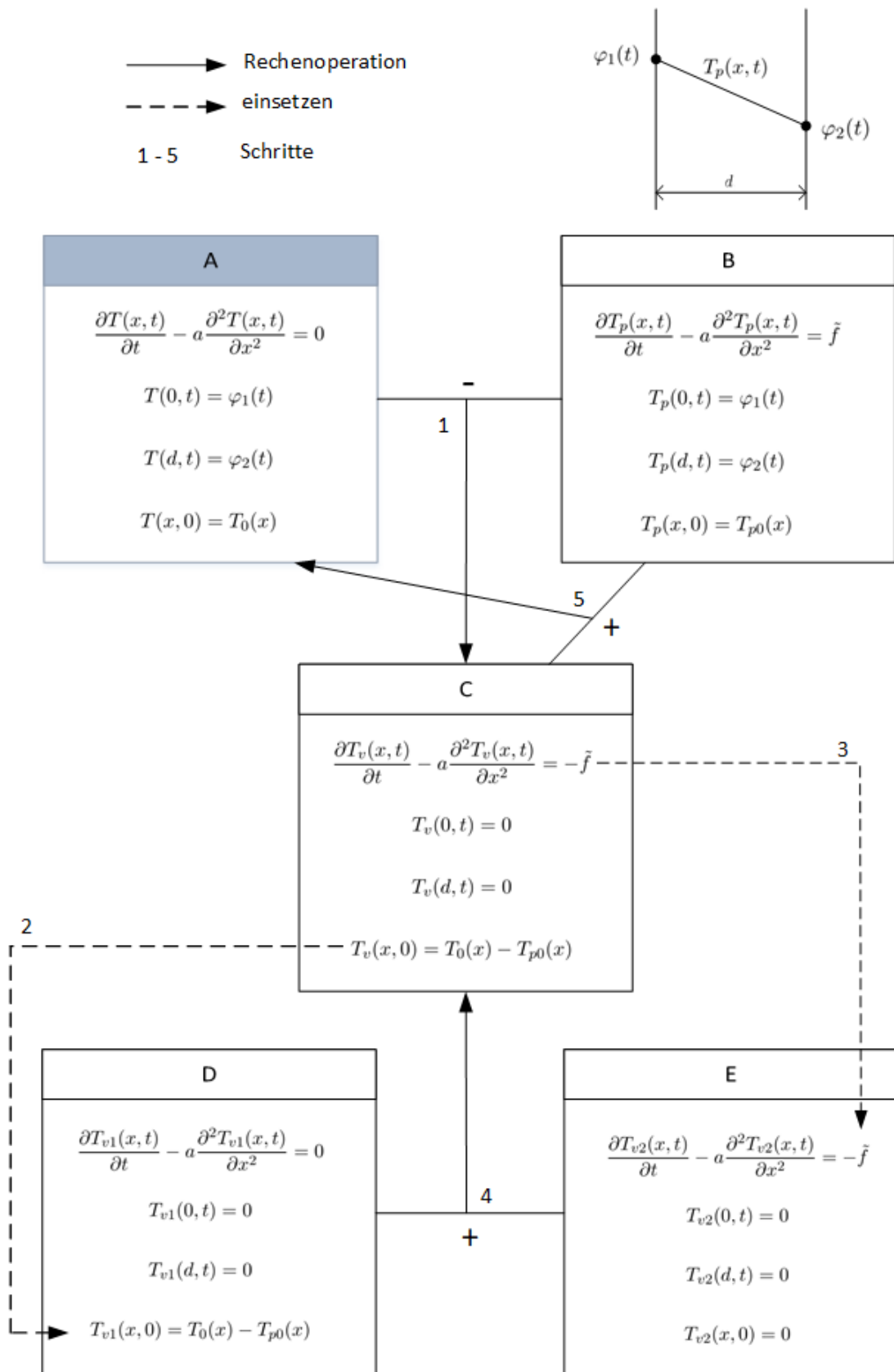


Abbildung 3.4: Berechnungskonzept1

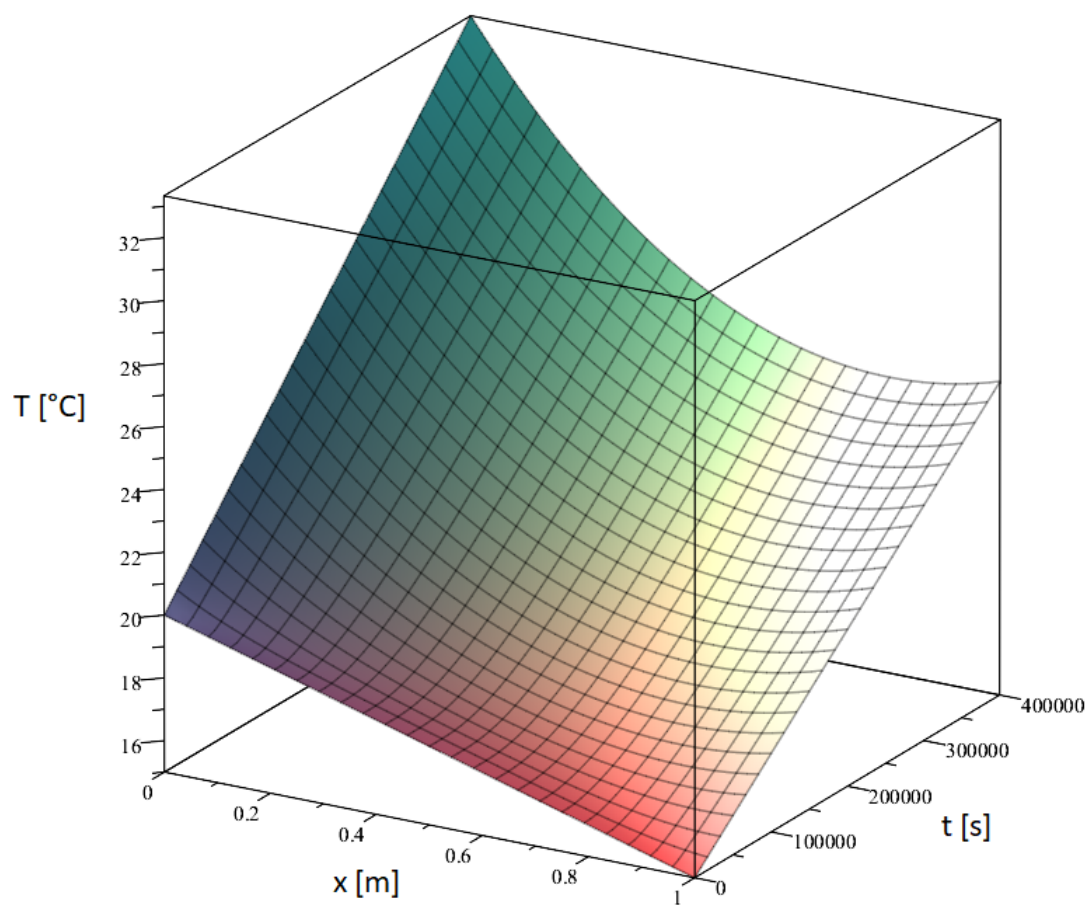


Abbildung 3.5: inhomogene Randbedingungen

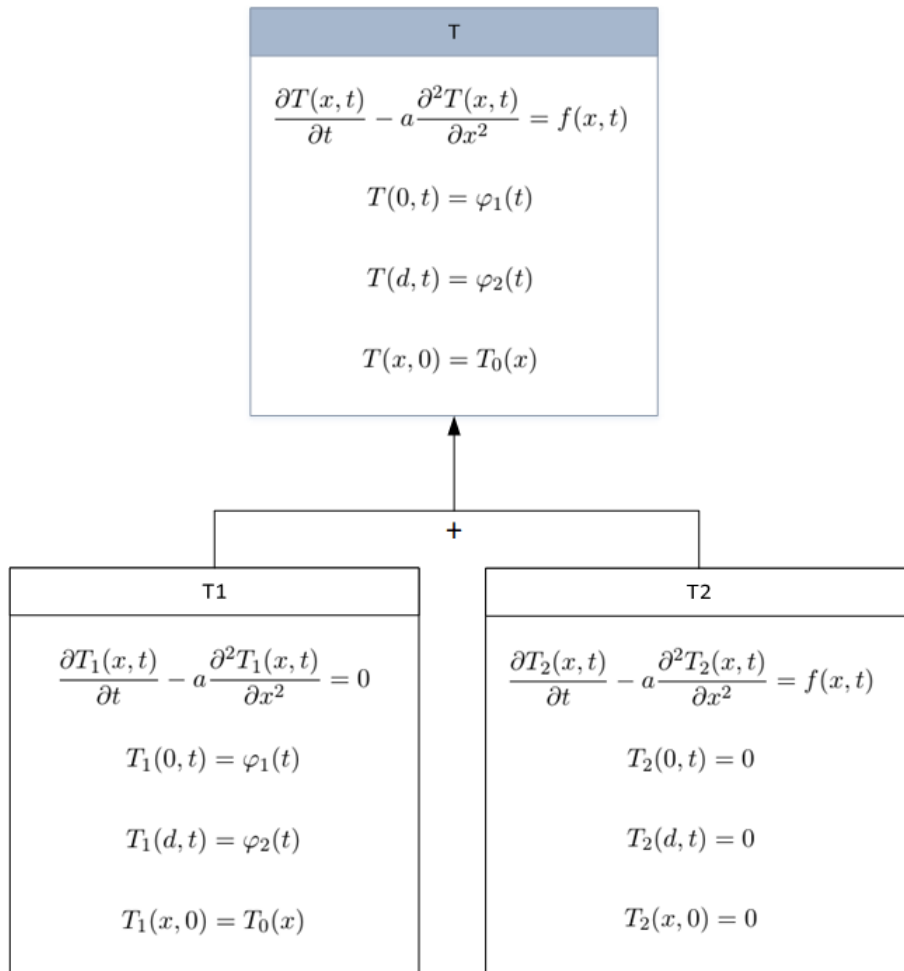


Abbildung 3.6: Berechnungskonzept2

4 Instationäre Wärmeleitung durch mehrschichtige Wände

Da heutzutage keine Gebäude konstruiert werden, die nur aus einer Schicht bestehen, ist es von hoher Notwendigkeit, auch geschichtete Bauwerkswände auf ihr thermisches Verhalten zu untersuchen. Gekoppelte Systeme werfen jedoch Schwierigkeiten in ihrer Berechnung auf. Diese gilt es nun zu nennen und gegebenenfalls zu lösen. Grundsätzlich bieten sich zwei Lösungsansätze für die Wärmeleitung in mehrschichtigen Wänden an. Zum einen die Methode mit Transmissionsbedingungen und zum anderen das Verfahren, indem die Wärmeleitungsgleichung mit veränderlichen Koeffizienten behandelt wird. Ersteres wird im Rahmen dieser Arbeit nur kurz vorgestellt und auf ihre Existenz verwiesen, letzteres wird tief greifend bearbeitet und auf seine Effektivität überprüft.

4.1 Ansatz mit Übergangsbedingungen

Bei diesem Ansatz betrachtet man vorerst den Wärmestrom durch die einzelnen Bauteilschichten getrennt. Über das Wissen, wie sich der Wärmestrom an den Schichtgrenzen verhalten muss, lassen sich Übergangsbedingungen formulieren. Zum einen ist klar, dass die Temperatur an den Schichtübergangsstellen keinen Sprung machen darf, d.h. sie muss von links und von rechts gesehen die gleichen Werte annehmen. Zum anderen darf die Wärmestromdichte keine Unstetigkeiten aufweisen, was augenblicklich zu den beiden Vorgaben

$$T_i(d_i, t) = T_{i+1}(0, t) = \varphi_{i+1}(t) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.1)$$

und

$$\lambda_i \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial x_i} \bigg|_{x_i=d_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}} \bigg|_{x_{i+1}=0} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.2)$$

führt.[5] Abbildung 4.1 zeigt eine Prinzipskizze für dreischichtige Wände. Es würde also bedeuten, dass in der mittleren Schicht sowohl Dirichlet- als auch Neumann- Randbedingungen aufgebracht werden müssten. An den beiden äußeren Schichten würden Randbedingungen 3. Art zusätzlich eine Rolle spielen.

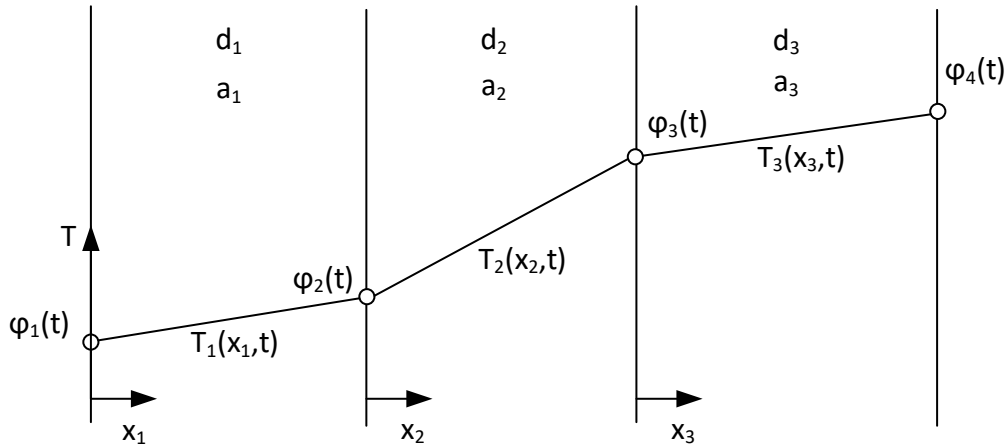


Abbildung 4.1: Wärmestrom in einer Wand bestehend aus drei Schichten unter instationären Bedingungen

4.2 Ansatz mit veränderlichen Koeffizienten

Beim oberen Ansatz löst man im Prinzip die Wärmeleitungsgleichung für konstante Koeffizienten und fügt diese Lösungen geschickt aneinander. Mit diesem Ansatz soll gezeigt werden, wie man für eine Schicht die Wärmeleitungsgleichung lösen kann ohne jegliche Übergangsbedingungen zu verwenden, und dennoch die verschiedenen Material- und Geometrieigenschaften der einzelnen Schichten erfassen kann. Das Hauptproblem der Berechnung des Temperaturfeldes in einer geschichteten Wand- ist, wie schon erwähnt, das unterschiedliche Material bzw. die diskontinuierliche Wärmeleiteigenschaft der Wand. Trägt man die Stoffkennwerte, zum Beispiel die Wärmeleitfähigkeit λ , auf eine Ordinate über die Wanddicke auf (siehe Abbildung 4.2 blaue Funktion), so stellt man eine Unstetigkeit der ansonsten konstanten Funktion fest, und zwar genau an den Schichtübergangsstellen. Das macht es unmöglich, eine solche Funktion zu differenzieren. Man kann sich jedoch behelfen, indem man eine Funktion findet, welche die sprunghafte Änderung des Stoffparameters zumindest näherungsweise erfasst. Das kann beispielsweise durch eine Entwicklung der stückweisen Funktionen in eine Fourierreihe passieren (siehe Abbildung 4.2 rote Funktion). Um eine realitätsnahe Darstellung des Materialwechsels zu erlangen, werden sehr viele Summenglieder benötigt. Das führt zu einer sehr langen trigonometrischen Funktion, welche für die folgenden Rechnungen nicht mehr gebrauchstauglich wird, vor allem nicht für viele Wandschichten. Ganz abgesehen vom dadurch resultierenden Rechenaufwand, wird an den Sprungstellen immer das sogenannte Gibb'sche Phänomen auftreten. Demnach ist durch die Approximation in Bezug auf die endliche Anzahl von Termen immer ein kleiner Fehler hinzunehmen, der durch Über- und Unterschwingungen an den Übergangsstellen entsteht.[12] Wenn jedoch an die Stoff- Funktion nur die Eigenschaft der Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit vorausgesetzt wird, kann man sich auch mit einer abschnittsweisen definierten Funktion zufrieden geben, wie sie in Abbildung 4.3 gezeigt wird. Diese Funktion kann eine Potenzfunktion sein oder eine trigonometrische Funktion. Wählt man eine Potenzfunktion, dann muss sie mindestens den Grad 3 aufweisen, da man sicherstellen muss, dass sie an den zwei Übergangsstellen (pro Teilfunktion) jeweils den richtigen Wert und den Anstieg gleich Null hat. Entscheidet man sich für eine trigonometrische Funktion, zum Beispiel die Sinusfunktion, so muss die richtige Amplitude, Periodenlänge und Phasenverschiebung gewählt werden. Zwischen beiden Auswahlmöglichkeiten herrschen

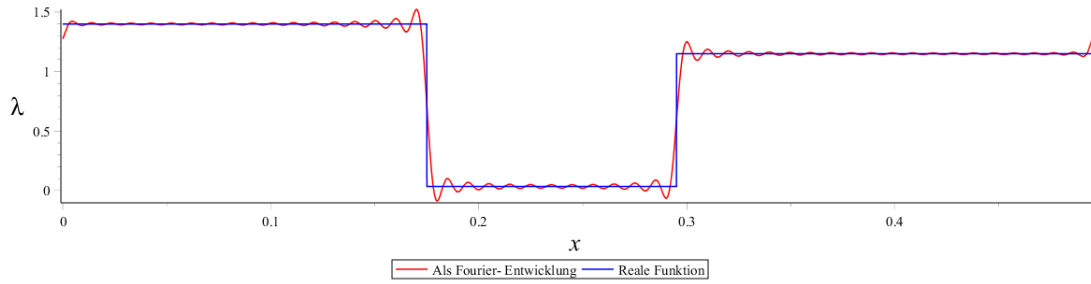


Abbildung 4.2: Fourierreihenentwicklung

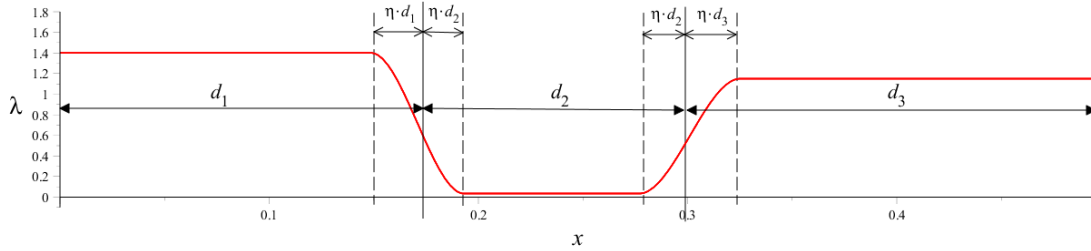


Abbildung 4.3: Sinusfunktion

keinerlei qualitative Unterschiede. Worüber man sich jetzt noch Gedanken machen muss, ist wo man den Beginn und das Ende des Schichtübergangs definiert. An dieser Stelle soll hier der „Schichtübergangsfaktor η “ eingeführt werden. Er beschreibt das Verhältnis von Beginn bzw. vom Ende des Schichtübergangs zur jeweiligen Schichtdicke. Beträgt er zum Beispiel 10% so setzt der Übergang bei 90% der ersten Schicht ein und endet bei 10% der zweiten Schicht (siehe Abbildung 4.3). Prinzipiell gilt: Je kleiner der Faktor η ist, umso besser ist die Annäherung an die blaue Funktion aus Abbildung 4.2. Hat man nun eine geeignete Funktion für die Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x)$, die Wärmespeicherkapazität $c_p(x)$ und die Dichte $\rho(x)$ gefunden, kann man mit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung als partielle Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten anfangen.

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung für inhomogene Medien lautet folgendermaßen:[15]

$$\rho(x)c_p(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right) \quad (4.3)$$

Durch die Separation der Veränderlichen, gelangt man zu der Form

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{\lambda'(x)}{\rho(x)c_p(x)} \frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{\lambda(x)}{\rho(x)c_p(x)} \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konst.} = -\mu \quad (4.4)$$

in der orts- und zeitveränderliche Anteile getrennt betrachtet werden können. Wobei $-\mu$ wieder eine Konstante darstellt, für welche die Relation 4.4 erfüllt ist. Im Folgenden wird das Produkt aus Wärmespeicherkapazität $c_p(x)$ und Dichte $\rho(x)$ aus Gründen der Schreibarbeit mit $r(x)$ bezeichnet. Durch Umformen erhält man die Gleichung

$$X''(x)\lambda(x) + X'(x)\lambda'(x) = -\mu r(x)X(x) \quad (4.5)$$

als Fundament der weiteren Betrachtung. Gleichung 4.5 führt augenblicklich zum nächsten Schritt, dem Sturm-Liouville-Problem.

4.2.1 Sturm-Liouville-Problem

Ein Rand- und Eigenwertproblem wird Sturm- Liouville- Problem genannt, wenn die Differentialgleichung die Form

$$(p(x)\varphi'(x))' - q(x)\varphi(x) = -\lambda g(x)\varphi(x) \quad (4.6)$$

hat, wobei $\varphi(x)$ die Eigenfunktionen und λ die komplexen Eigenwerte darstellen. Die Randbedingungen können hierbei erster, zweiter und dritter Art sein. Weiterhin müssen an die übrigen Funktionen folgende Bedingungen gesetzt werden:¹

1. $q(x)$ und $g(x)$ sind reellwertige und stetige Funktionen
2. $p(x)$ ist reellwertig und stetig differenzierbar
3. $q(x) \geq 0$
4. $p(x) > 0$
5. die Lösung $\varphi(x)$ ist zwei mal stetig differenzierbar

Offensichtlich sind die Voraussetzungen 1 und 2 schon erfüllt, wenn man betrachtet wie jene Funktionen aufgestellt wurden, schließlich wurde an den signifikanten Stellen links- und rechtsseitig der selbe Wert sowie die selbe Ableitung gefordert. Das $q(x)$ verschwindet in dem Fall der Wärmeleitungsgleichung, $p(x)$ entspricht der Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x)$ und $g(x)$ ist nichts anderes als $r(x)$. Dadurch dass die Wärmeleitfähigkeit aus physikalischen Gründen weder negativ noch null sein kann, ist Bedingung 4 ebenfalls erfüllt. Das gilt im übrigen auch für die Funktionen der Wärmespeicherkapazität und der Dichte. Liegt also nun ein Sturm-Liouville'sches Randwertproblem vor, so gibt es demnach unendlich viele Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen. Ein Eigenwert ist eine reellwertige oder komplexe Zahl, zu der eine nichttriviale Lösung $\varphi(x)$ des Problems 4.6 vorliegt. Zur Lösung der Aufgabe lässt sich die Differentialgleichung 4.6 in eine äquivalente Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b g(y)\varphi(y)G(x,y)dy \quad (4.7)$$

überführen. Zum Aufstellen dieser Integralgleichung wird jedoch noch die Grundleistung (Green'sche Funktion) $G(x,y)$ der homogenen Sturm-Liouville-Aufgabe in Bezug auf die Wärmeleitungsgleichung

$$X''(x) \lambda(x) + X'(x) \lambda'(x) = 0. \quad (4.8)$$

benötigt. Dazu berechnet man ein Fundamentalsystem von (4.8). Hat man eine Lösung $X_1(x)$ gefunden, lässt sich mittels *Reduktion der Ordnung* eine zweite von $X_1(x)$ linear unabhängige Lösung $X_2(x)$ der homogenen Aufgabe bestimmen.[4] Die Berechnung der Lösung kann im Anhang 2 genauestens nachvollzogen werden. Man erhält demnach:

$$X_1(x) = \int \frac{C_1}{\lambda(x)} dx + C_2 \quad (4.9)$$

¹Bedingung 1 bis 5 müssen mindestens im Definitionsbereich gelten, in diesem Fall $0 \leq x \leq d$

$$X_2(x) = \frac{1}{C_1} \left(\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \ C_1^2 C_4 + C_1 C_2 C_4 - C_3 \right) \quad (4.10)$$

Um zu überprüfen, ob es sich wirklich um linear unabhängige Lösung handelt, kann man testen, ob die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{C_3}{\lambda(x)} \neq 0 \quad (4.11)$$

ungleich Null wird. Wie man sieht, trifft das für alle $C_3 \neq 0$ zu. Weiterhin gilt, dass die inhomogene Randwertaufgabe (4.5) nur dann eindeutig lösbar ist, wenn die homogene Aufgabe (4.8) nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$ besitzt. Das ist der Fall, wenn

$$\begin{vmatrix} X_1(0) & X_2(0) \\ X_1(d) & X_2(d) \end{vmatrix} = \int_0^d \frac{C_3}{\lambda(x)} dx \neq 0 \quad (4.12)$$

ungleich Null gilt. Auch das ist nur für $C_3 \neq 0$ erfüllt. Die letzte Forderung an die Lösungen der homogenen Sturm-Liouville Aufgabe ist, dass die Randwerte folgendermaßen

$$X_1(0) = 0 \quad (4.13)$$

$$X_2(d) = 0 \quad (4.14)$$

befriedigt werden. Glücklicherweise wurden die Integrationskonstanten C_1 bis C_4 fleißig mitgenommen und man kann sie nun verwenden, um die Lösung den zwei Randbedingungen anzupassen. Geliefert werden C_2 und C_3 , während C_1 und C_4 beliebig gewählt werden können (ausgenommen gleich Null), weil sie sich beim Aufstellen der Green'schen Funktion in jedem Fall rauskürzen. Hier werden sie einfach $C_1 = C_4 = 1$ gesetzt, sodass sich letztlich

$$X_1(x) = - \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=0} + \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \quad (4.15)$$

$$X_2(x) = - \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=d} + \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \quad (4.16)$$

als spezielle Lösung des homogenen Problems ergibt, welches augenblicklich zur bereits erwähnten Green'schen Funktion, auch Grund- bzw. Fundamentallösung des inhomogenen Randwertproblems (4.5) genannt, führt. Sie ist definiert als

$$G(x, y) = \begin{cases} G_1(x, y) & 0 \leq y \leq x \leq d \quad (Q_1) \\ G_2(x, y) & 0 \leq x \leq y \leq d \quad (Q_2) \end{cases} = \frac{1}{c} \begin{cases} X_1(y)X_2(x) & 0 \leq y \leq x \leq d \quad (Q_1) \\ X_1(x)X_2(y) & 0 \leq x \leq y \leq d \quad (Q_2) \end{cases}. \quad (4.17)$$

mit

$$c = \lambda(x) [X_1(x)X_2'(x) - X_1'(x)X_2(x)]. \quad (4.18)$$

Der Klammerausdruck ist dabei nichts anderes als die Wronski- Determinante (4.11) und es folgt

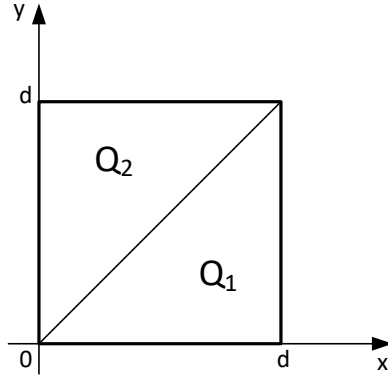


Abbildung 4.4: Quadrat in (x,y)-Ebene, nachempfunden [3]

$$c = C_3 = \int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx \quad (4.19)$$

als ein konstanter Faktor. Es ist unmittelbar aus (4.17) zu erkennen, dass die Funktion symmetrisch ist. Der Definitionsbereich von (4.17) lässt sich geometrisch als ein Quadrat Q aus den beiden Dreiecken Q_1 und Q_2 in der (x,y) - Ebene deuten (siehe Abbildung 4.4). Für $x = y$ ist die Diagonale definiert.

Bevor man weiter zur Lösung der Integralgleichung übergeht, müssen vorher noch folgende Bedingungen an der Green'schen Funktion überprüft werden:

1. $G(x, y)$ ist stetig in Q .
2. Für $x \neq y$ (in den beiden Dreiecken) ist $G(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar.
3. $G(x, y)$ erfüllt die Randbedingungen $G(0, y) = G(d, y) = 0$ für $0 \leq y \leq d$.
4. Für festes y und $x \neq y$ erfüllt $G(x, y)$ die homogene Aufgabe (4.8): $\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x}) = 0$.
5. $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x}$ besitzt für $x = y$ (also auf der Diagonale) eine Sprungstelle von der Größe $\frac{1}{\lambda(y)}$.

Die einzelnen Forderungen wurden im Anhang 3 bestätigt, also kann man die gefundene Green'sche Funktion als richtig betrachten und es lässt sich fortfahren.[12][3]

4.2.2 Lösung der Integralgleichung

Statt der Differentialgleichung 4.5 ist man nun in der Lage die dazugehörige lineare Fredholm-Integralgleichung 2. Art

$$X(x) = \mu \int_0^d \underbrace{r(y)G(x, y)}_{k(x, y)} X(y) dy \quad \text{mit } x \in [0, d] \quad (4.20)$$

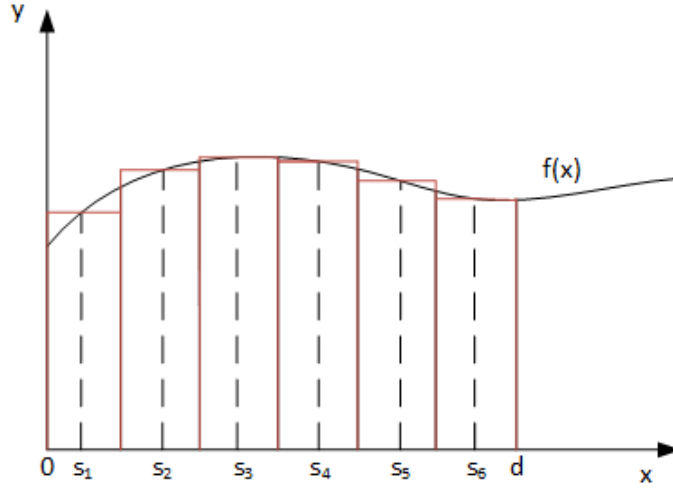


Abbildung 4.5: Mittelpunkregel

zu untersuchen. Das Produkt aus $r(y)$ und $G(x, y)$ wird fortan als $k(x, y)$ bezeichnet, welches als Kern der Integralgleichung verstanden wird. Die direkte Lösung von 4.20 ist nicht sofort möglich, weil die Eigenwerte nicht bekannt sind. Um die Mittel der linearen Algebra anwenden zu können, muss vorerst das Integral diskretisiert werden. Die Diskretisierung kann durch eine geeignete Quadraturformel erfolgen. Beispielsweise die Mittelpunkregel (siehe Abbildung 4.5), wonach ein bestimmtes Integral folgendermaßen durch eine Summe approximiert werden kann:

$$\int_0^d f(x) \, dx \approx h \sum_{i=1}^m \underbrace{f\left(hi - \frac{h}{2}\right)}_{s_i} \quad \text{mit } h = \frac{d}{m} \quad (4.21)$$

Die Fläche unter der Funktion wird in m äquidistante Rechtecke unterteilt und an den Stellen s_1, s_2, \dots jeweils der Funktionswert berechnet. Die Summe der Funktionswerte, multipliziert mit dem Gitterpunkt Abstand h , ergibt näherungsweise das Integral. Selbstverständlich wird mit größerem m die Approximation genauer und mit unendlich großem m exakt. In der Art und Weise kann man zum Beispiel auch mit der Rechteckregel, Trapezregel oder Simsonregel verfahren. Für die Integralgleichung 4.20 bedeutet eine numerische Approximation folgendes:

$$X(x) \approx \tilde{X}(x) = \mu h \sum_{i=1}^m k(x, s_i) \tilde{X}(s_i) \quad (4.22)$$

Auch jetzt ist die Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt. Es ist jedoch bekannt, dass die Eigenwerte von 4.20 auch mit

$$\tilde{X}(s_k) = \mu h \sum_{i=1}^m k(s_k, s_i) \tilde{X}(s_i) \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

berechnet werden können. Für einen auf dem Definitionsbereich stetigen Kern $k(x, y)$ konvergieren die Eigenwerte von Gleichung 4.23 gegen die Eigenwerte von 4.20.[7] In Matrizenschreibweise bedeutet 4.23:

$$\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \tilde{X}(s_1) \\ \tilde{X}(s_2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(s_m) \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} k(s_1, s_1) & k(s_1, s_2) & \cdots & k(s_1, s_m) \\ k(s_2, s_1) & k(s_2, s_2) & \cdots & k(s_2, s_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(s_m, s_1) & k(s_m, s_2) & \cdots & k(s_m, s_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(s_1) \\ \tilde{X}(s_2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(s_m) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

oder auch

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_E - \underbrace{\begin{bmatrix} h k(s_1, s_1) & h k(s_1, s_2) & \cdots & h k(s_1, s_m) \\ h k(s_2, s_1) & h k(s_2, s_2) & \cdots & h k(s_2, s_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h k(s_m, s_1) & h k(s_m, s_2) & \cdots & h k(s_m, s_m) \end{bmatrix}}_{T_m} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{X}(s_1) \\ \tilde{X}(s_2) \\ \vdots \\ \tilde{X}(s_m) \end{bmatrix}}_{\tilde{X}_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Durch Lösen der Eigenwertgleichung 4.25 erhält man die Werte von $\frac{1}{\mu}$ und somit eine Annäherung an die Eigenwerte von 4.20. Auch hier gilt wieder, dass mit wachsender Anzahl der Stützstellen m die Genauigkeit zunimmt. Somit hat man m -Eigenwerte mit m -Eigenvektoren \tilde{X}_m erworben. Die Elemente der Eigenvektoren $\tilde{X}(s_k)$ bilden die Werte an den Stützstellen s_k der zugehörigen Eigenfunktion $\tilde{X}_k(x)$.

Um diese jetzt letztlich zu berechnen, müssen die erworbenen Werte in Gleichung 4.22 eingesetzt werden. Gleichmaßen ist es möglich beispielsweise eine Fourierreihe zu finden, welche die Einträge der Eigenvektoren entlangläuft und somit die zugehörige Eigenfunktion approximiert.

Der Vollständigkeit halber soll hier noch ein anderer Ansatz zur Lösung der Gleichung 4.20 vorgestellt werden, welcher ebenfalls geeignet ist, um die Eigenfunktionen zu finden. Hierbei soll die Funktion $X(x)$ als Potenzfunktion der Form

$$X(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \quad (4.26)$$

betrachtet werden. Eingesetzt in 4.20 bedeutet das

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k - \mu \int_0^d k(x, y) \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^k dy = 0 \quad (4.27)$$

und nach Umformen und Zusammenfassen der Summen ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(x^k - \mu \int_0^d k(x, y) y^k dy \right) a_k = 0. \quad (4.28)$$

Auch hier diskretisiert man die Gleichung, indem nur an ausgewählten Stellen x_i

$$\sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{\left(x_i^k - \mu \int_0^d k(x_i, y) y^k dy \right)}_{A_{ik}} a_k = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, m \quad (4.29)$$

gerechnet wird. Es hat zur Folge, dass jetzt die Eigenwerte und die Koeffizienten a_k der Eigenfunktionen die Unbekannten darstellen. Außerdem wird das Integral nun lösbar und muss nicht mehr durch numerische Methoden approximiert werden. Matriziell bedeutet Gleichung 4.29

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^0 - \mu A_{10} & x_1^1 - \mu A_{11} & \cdots & x_1^{m-1} - \mu A_{1(m-1)} \\ x_2^0 - \mu A_{20} & x_2^1 - \mu A_{21} & \cdots & x_2^{m-1} - \mu A_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 - \mu A_{m0} & x_m^1 - \mu A_{m1} & \cdots & x_m^{m-1} - \mu A_{m(m-1)} \end{bmatrix}}_{T_{m\lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Auch hier sucht man sich wieder die Eigenwerte μ , für die eine nichttriviale Lösung des Vektors \vec{a} existiert, das ist genau dann der Fall, wenn Matrix $T_{m\lambda}$ nicht invertierbar ist und das tritt für

$$\det(T_{m\lambda}) = 0 \quad (4.31)$$

auf. Durch Gleichung 4.31 lässt sich demnach jeder Eigenwert berechnen, dann bleibt nur noch übrig diese wieder in 4.30 einzusetzen um die zugehörigen Eigenvektoren zu erhalten. Die Elemente der Eigenvektoren sind die Koeffizienten der Potenzreihe 4.26 und somit die Koeffizienten der Eigenfunktionen.

Es gibt also verschiedene Ansätze, die Lösungen für die Ortsfunktion der Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten liefern. Völlig gleich, welche Alternative gewählt wird, die Eigenfunktionen werden alle folgende Eigenschaften besitzen.

- Sie erfüllen alle die homogenen Dirichlet- Randbedingungen.
- Sie stehen im Sinne des Skalarproduktes alle paarweise orthogonal aufeinander und bilden somit eine Orthogonalbasis. Das bedeutet, es muss $\int_0^d \tilde{X}_k(x) \tilde{X}_i(x) dx = 0$ mit $k \neq i$ gelten.
- Ihre zugehörigen Eigenwerte sind alle reellwertig.

Mit den Funktionen für $\tilde{X}(x)$ ist man nun in der Lage zurück zum Produktansatz zu gehen, um die zeit- und ortsveränderlichen Anteile wieder zusammenzusetzen. $V_k(t)$ ergibt sich näherungsweise aus 4.4 zu

$$V_k(t) \approx \tilde{V}_k(t) = C_k e^{-\mu_k t}. \quad (4.32)$$

Dabei sollte nochmal darauf hingewiesen werden, dass durchgängig $-\mu_k$ berechnet wurde und man hier die Eigenwerte von oben nicht noch einmal negativ einsetzen muss. Eingesetzt in den Produktansatz

$$T_k(x, t) \approx \tilde{T}_k(x, t) = \tilde{X}_k(x) \tilde{V}_k(t) \quad (4.33)$$

erhält man die Annäherung an die Lösungen für die Wärmeleitungsgleichung mit veränderlichen Koeffizienten 4.3. Um ein System an linear unabhängigen Lösungen zu erhalten, wird wieder wie für einschichtige Wände die Summe der einzelnen Lösungen

$$\sum_{k=1}^m \tilde{T}_k(x, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{X}_k(x) \tilde{V}_k(t) \quad (4.34)$$

gebildet. Nach Aufbringen der Anfangsbedingung

$$T_0(x) \approx \tilde{T}(x, 0) = \sum_{k=1}^m C_k \tilde{X}_k(x) \underbrace{e^{-\mu_k 0}}_{=1} \quad (4.35)$$

lassen sich wieder die Entwicklungskoeffizienten bestimmen. Dazu multipliziert man die Gleichung 4.35 mit einer beliebigen normierten Eigenfunktion, zum Beispiel $\frac{\tilde{X}_1(x)}{\|\tilde{X}_1(x)\|}$ und bildet im Anschluss beidseitig das bestimmte Integral. Auf Grund der Orthogonalität entfallen auf der rechten Seite alle Produkte außer das, indem $\tilde{X}_1(x)$ mit sich selbst multipliziert wurde. Was für $\tilde{X}_1(x)$ geht, funktioniert natürlich genauso gut mit allen anderen Ortsfunktionen, sodass man

$$\int_0^d T_0(x) \frac{\tilde{X}_k(x)}{\|\tilde{X}_k(x)\|} dx = \int_0^d C_k \tilde{X}_k(x) \frac{\tilde{X}_k(x)}{\|\tilde{X}_k(x)\|} dx \quad (4.36)$$

schreiben kann. Oder anders formuliert, ergibt sich die rechte Seite zu

$$C_k \frac{\int_0^d \tilde{X}_k^2(x) dx}{\underbrace{\sqrt{\int_0^d \tilde{X}_k^2(x) dx}}_{=\sqrt{\int_0^d \tilde{X}_k^2(x) dx} = \|\tilde{X}_k(x)\|}} \quad (4.37)$$

und Gleichung 4.36 lässt sich direkt nach dem Fourierkoeffizienten umstellen:

$$C_k = \frac{1}{\|\tilde{X}_k(x)\|^2} \int_0^d T_0(x) \tilde{X}_k(x) dx \quad (4.38)$$

Womit die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit veränderlichen Koeffizienten und homogenen Dirichlet- Randbedingungen endgültig gelöst ist und aufgeschrieben werden kann:

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \tilde{X}_k(x) e^{-\mu_k t} \quad (4.39)$$

5 Anwendung

Jetzt wo die Lösungen gefunden wurden, ist natürlich interessant, wie man sie auf baupraktische Probleme anwenden kann. In diesem Kapitel soll der Nutzen der gewonnenen Gleichungen herausgearbeitet sowie einige Anwendungsbeispiele vorgestellt werden. Es gilt nun außerdem festzustellen, an welche Grenzen man stoßen kann, wenn die beschriebenen Methoden umgesetzt werden oder welche Ungenauigkeit man dabei begeht.

5.1 Anwendungsmöglichkeiten instationärer Temperaturfelder

Gegenüber stationärer Temperaturfeldberechnungen bieten Lösungen instationärer Temperaturfelder zahlreiche Vorteile. Einige dieser Vorzüge und Möglichkeiten der Anwendung sollen hier kurz vorgestellt werden. Der erste und wichtigste Vorteil ist die Möglichkeit, außer der Wärmeleitfähigkeit noch weitere wichtige materialspezifische Einflussparameter einfließen lassen zu können. Erst im instationären Fall mit Verknüpfung der Zeitabhängigkeit können die Dichte und die spezifische Wärmespeicherkapazität berücksichtigt werden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist, dass man nun in der Lage ist, Aufwärm- und Abkühlungsvorgänge simulieren zu können. Man kann Fragen nach der Dauer dieser Vorgänge beantworten, d.h. wie viel Wärme von einem Bauteil in einer bestimmten Zeit aufgenommen bzw. abgegeben wird. Dieses Wissen wird notwendig, wenn zum Beispiel Heizanlagen mit intermittierendem Betrieb (Taktbetrieb) ausgestattet werden. Solche Aggregate werden an die veränderliche Umgebungstemperatur angepasst und es könnte hilfreich sein zu wissen, wie die Wand beim Aufrechterhalten der Innenraumtemperatur mitarbeitet. Um es genauer zu formulieren: Wenn bekannt ist, wie lange es dauert bis die Wand eine bestimmte Menge von Wärme abgegeben hat, können die Schaltzeiten des Heizkessels angepasst werden.

Ein weiteres Beispiel ist das energieeffiziente Bauen. Ein Passivhaus ist durch einen Wert definiert, der beschreibt, wie viel Liter Heizöl pro Quadratmeter pro Jahr maximal verbraucht werden darf. Um Aussagen darüber zu treffen, ob es sich wirklich bei der ausgewählten Konstruktion um ein Passivhaus handelt, muss man sich natürlich einen Jahresverlauf der Außentemperatur anschauen und durch geeignete Berechnungen oder Simulationen dann ermitteln, wie groß der Wärmeverlust beim gewählten Wandaufbau aussieht bzw. wie viel man nachheizen muss.

Ein weiterer Aspekt, welcher nun im instationären Fall untersucht werden kann, ist die Brandbeurteilung von Bauteilen. Wenn man beispielsweise ein Stahlbetonelement betrachtet, könnte es von Interesse sein zu wissen, wie lange es dauert bis die Hitze die Betonüberdeckung des Bewehrungsstahls überwunden und die Bewehrungsstäbe so stark erwärmt hat, dass sie *weich* werden und somit als Tragglieder ausfallen. Wenn man beim Betonbau bleibt: Die Bedeutung der instationären Betrachtung in Hinblick auf die Hydratation des Zementes wurde ja im Zusammenhang mit Wärmequellen- und -senken schon erwähnt, aber ein weiteres zeit- und temperaturabhängiges Verhalten des Betons, welches

auch nicht immer vernachlässigt werden darf ist das Kriechen und Schwinden. Die beiden Effekte werden stark von der Außentemperatur beeinflusst. Zeitveränderliche Temperaturfelder könnten also ein Hilfsmittel zur Berechnung des Kriech- und Schwindverhaltens eines Bauteils über die Querschnittsbreite bzw. -höhe darstellen. Ganz im Allgemeinen wäre man sogar in der Lage, zeitveränderliche Spannungen infolge von Temperaturbelastung an jeder Stelle des Bauteilquerschnittes zu berechnen, die aus Zwang resultieren.

Ein weiteres wichtiges Feld der Bauphysik, welches bei instationären Temperaturfeldern ihre Anwendung findet, ist der Feuchtetransport in Wänden. Bekanntlich kann es in Außenwänden zu einem Phasenänderungspunkt, je nach dem welchen Aggregatzustand das Wasser zum Betrachtungszeitpunkt hat, auch Gefrier- oder Schmelzpunkt genannt, kommen. Im stationären Fall ist dieser Punkt fixiert, jedoch kann er bei instationären Vorgängen innerhalb der Wand wandern. Kennt man also in einem bestimmten Zeitintervall die Innen- und Außentemperatur, so lässt sich die Lage des Phasenänderungspunktes eingrenzen. In der Planungsphase würde man also die Dicke und Lage der einzelnen Schichten so auslegen, dass der Nullpunkt möglichst immer in der gewünschten Schicht liegt, weil die Volumenzunahme des Wassers infolge der Phasenänderung nicht jedes Material aushält.

Für all die genannten Punkte ist es von hoher Bedeutung, immer die Möglichkeit zu haben, willkürlich veränderliche Randbedingungen auf beiden Seiten der Wand zuzulassen. So wurden auch die Lösungsansätze in dieser Arbeit konzipiert. Hier sieht man auch den Nachteil einer instationären Behandlung der Wärmeleitung unter Vorgabe periodischer Randbedingungen. Schließlich verhält sich die Außentemperatur keineswegs periodisch über die Zeit und schon gar nicht wenn kurze Zeiten (wenige Stunden) betrachtet werden.

Nun gilt es exemplarisch einige Beispielrechnungen durchzuführen, um die Qualität der hier entwickelten Lösungsmethoden zu veranschaulichen. Gemäß der Gliederung soll mit einschichtigen Wänden begonnen werden.

5.2 Einschichtige Wände

Ein kurzes Beispiel für einen Temperaturverlauf unter veränderlichen Randbedingungen wurde ja schon aufgezeigt, jedoch nur mit gleichmäßig wachsenden Randtemperaturen. Im folgendem wird kurz ein System mit beliebiger Außentemperatur behandelt.

Der deutsche Wetterdienst bietet auf seiner Internetseite [9] frei verfügbare Klimadaten an. Dazu gehören auch die historischen Temperaturwerte, die jede Stunde und auf eine Nachkommastelle genau gemessen wurden. Für die Differentialgleichung werden natürlich Funktionen der Temperaturverläufe benötigt. Die erhält man aber leicht, wenn man die Messwerte durch eine abschnittsweise definierte Funktion darstellt. Diese Funktion kann aber bei langen Zeiten sehr groß werden, deswegen empfiehlt es sich sie in eine Fourierreihe zu entwickeln, womit man die Länge der Funktion und somit die Rechenzeit verkürzen und steuern kann. Im Folgendem soll nochmal gezeigt werden, welche Auswirkungen diese Fourierreihen- Approximation des Temperaturverlaufs haben kann um konsequenterweise zu zeigen, welche Fehler oder besser gesagt Ungenauigkeiten dadurch resultieren können. Abbildung 5.1 zeigt, wie der Umgebungstemperaturverlauf über eine Woche aussehen könnte, wenn man den tatsächlichen Verlauf (schwarze Kurve in der die Punkte linear verbunden wurden) durch eine Fourierreihe (rote Kurve) darstellt und nach dem 30. Summenglied abschneidet. Die Ungenauigkeit sollte im Zuge dieser Arbeit verknäpft sein. Jetzt kann man die Temperaturverteilung aus Abbildung 5.1 als Randbedingung aufbringen. Es sollte nochmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass dieser Temperaturverlauf direkt auf die Oberfläche der Wand projiziert wird und der

Wärmeübergang somit nicht erfasst wird. Um den Übergang der Wärme aus der Umgebung auf die Oberfläche berücksichtigen zu können, wird die Randbedingung 3. Art notwendig, welche in dieser Arbeit aus Zeitgründen keinen Platz gefunden hat. Tabelle 5.1 zeigt die gewählten Eingangsparameter, welche denen von Normalbeton entsprechen. Die Materialkennwerte sind aus DIN EN ISO 10456 entnommen. [1] Die Angabe von der Anzahl der Reihenglieder m bezieht sich auf die Summandenanzahl von 8.1 und sollte nicht mit der Fourierreihe der Umgebungstemperatur in Verbindung gebracht werden. Auf Grundlage dieser Eigenschaften zeigt Abbildung 5.2 die zeitliche Temperaturverteilung in der Wand bei konstanter Innenraumtemperatur von 20°C und einer veränderlichen Oberflächentemperatur an der Außenseite ($x = 0$). Man erkennt sehr schön, wie die gesamte Wand die Temperaturänderung von der Außenseite mitmacht. Es ist vielleicht noch wichtig zu erwähnen, dass es nicht nötig ist die Anzahl der Summanden noch weiter in die Höhe zu treiben. Schon für $m = 10$ ist keine weitere Verbesserung der Qualität dieses Temperaturfeldes zu erwarten.

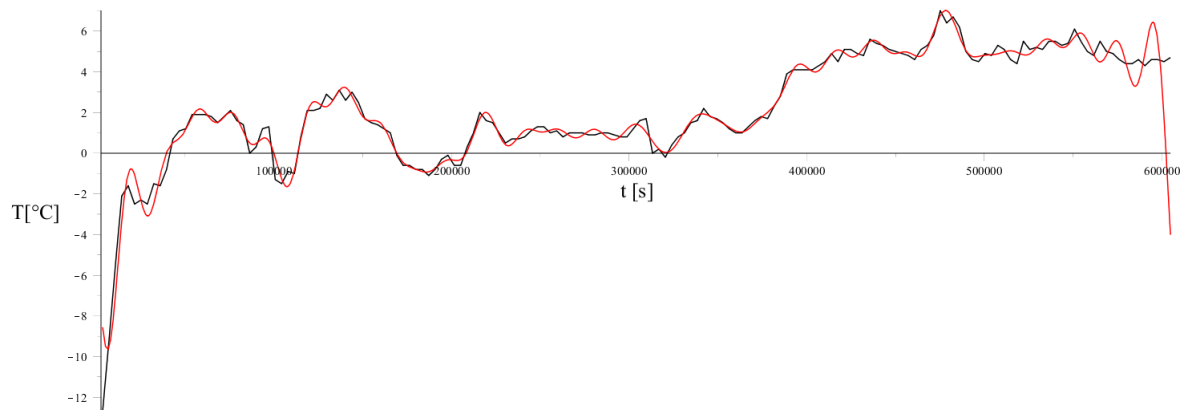


Abbildung 5.1: Annäherung eines trigonometrischen Polynoms an die Umgebungstemperatur

Bezeichnung	Belegung	Einheit
Wärmeleitfähigkeit λ	1, 15	W/mK
Wärmespeicherkapazität c_p	1000	J/kgK
Dichte ρ	1800	kg/m^3
Dicke d	0, 25	m
Anzahl der Reihenglieder m	10	—

Tabelle 5.1: Eingangswerte für Beton

Um die Bedeutung der instationären Betrachtung deutlich zu machen und um endgültig Zweifel an ihrer Notwendigkeit abzubauen, ändert man jetzt einfach die Dicke von 25cm auf 150cm und schaut was passiert. Ob solche Wandstärken jetzt umgesetzt werden, sei mal dahingestellt, aber beispielsweise Betonwände von Reaktordruckbehälter liegen schon in der Größenordnung. Hier soll jedoch lediglich der Einfluss von höheren Wanddicken demonstriert werden. Abbildung 5.3 zeigt so ein System.

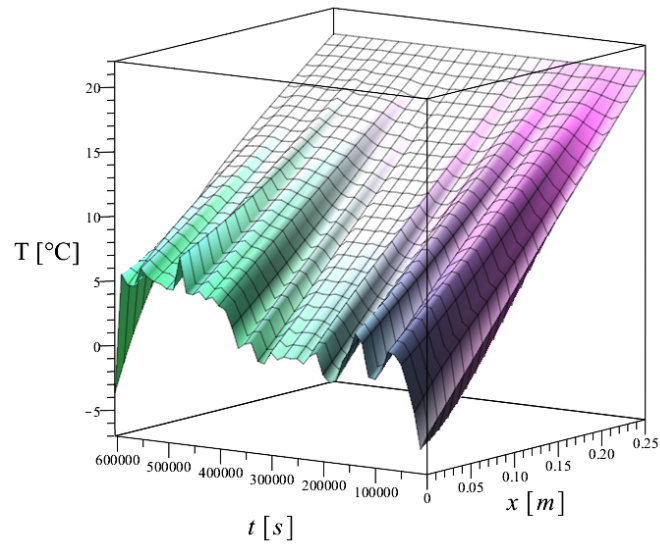


Abbildung 5.2: Wärmestrom durch eine 25cm starke Betonwand unter veränderlicher Außentemperatur und konstant gehaltener Innenraumtemperatur

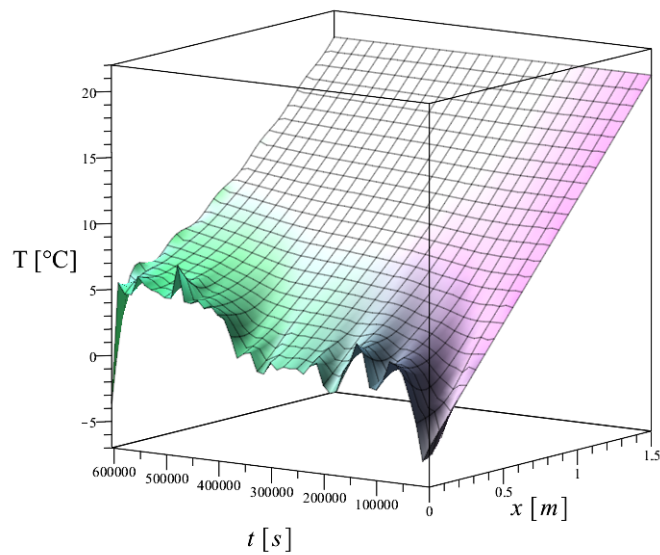


Abbildung 5.3: Wärmestrom durch eine 150cm starke Betonwand unter veränderlicher Außentemperatur und konstant gehaltener Innenraumtemperatur

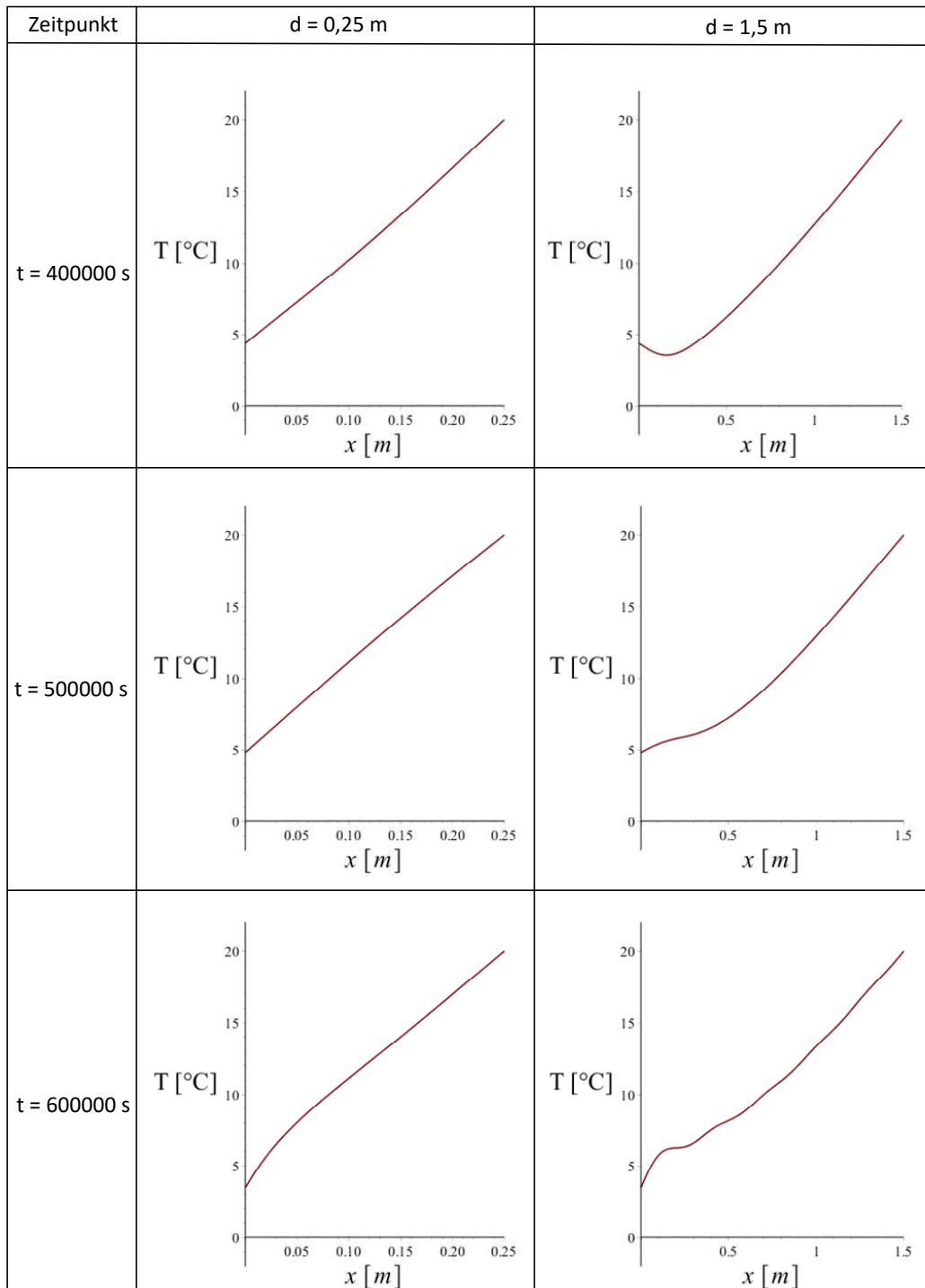


Abbildung 5.4: Direkter Vergleich zu beliebig gewählten Zeitpunkten

Man sieht schon einen deutlichen Unterschied in der Struktur des Temperaturfeldes. Während in der dünneren Wand diese fast vollständig von den Temperaturschwankungen betroffen ist, bekommt der Großteil der dickeren Wand davon fast gar nichts mit.

Aber den weitaus wichtigeren Effekt erkennt man besser, wenn die Temperaturverteilung bei einem festen Zeitpunkt verglichen wird. In der Abbildung 5.4 wurden die Grafiken von 5.2 und 5.3 zu den selben Zeitpunkten geschnitten und tabellarisch gegenüber gestellt. Man erkennt, dass für dünne Schichten der Temperaturverlauf noch nahezu linear ist, folg-

lich lässt sich eine stationäre Berechnung des Temperaturfeldes noch mit gutem Gewissen vollziehen. Bei dickeren Wänden sieht das schon ganz anders aus. Besonders zum Zeitpunkt $t = 400000s$ (oben rechts im Bild) sieht man wie nichtlinear sich die Temperatur in der Wand verhält. Der tiefste Punkt in dieser Kurve liegt bei $0,157m$ und hat dort einen Wert von $4,36^\circ C$. Würde man jetzt mit einer stationären Berechnung herangehen, müsste man die Randwerte bei $x = 0$ und $x = d$ linear miteinander verbinden und käme somit an der selben Stelle auf eine Temperatur von $6,00^\circ C$. Man begeht also in diesem Fall einen Fehler von fast 38 %.

5.3 Mehrschichtige Wände

Betrachtet wird nun eine Wand, bestehend aus einer Außendämmung in Form von Mineralwolle und einer zur Innenseite gewandten Betonschicht. Vereinfachender Weise werden erstmal nur unterschiedliche Wärmeleitfähigkeiten angenommen. Wenn der Ansatz zufriedenstellende Ergebnisse für veränderliche Wärmeleitfähigkeit liefert, dann wird auch eine gute Lösung für unterschiedliche Rohdichten und Wärmespeicherkapazitäten existieren. Für den Systemaufbau aus Tabelle 5.2 und Abbildung 5.5 soll der Temperaturverlauf unter homogenen Dirichlet- Randbedingungen berechnet werden.

Bezeichnung	Mineralwolle	Beton	Einheit
Wärmeleitfähigkeit λ	0,035	1,15	W/mK
Wärmespeicherkapazität c_p	(1030)	1030	J/kgK
Dichte ρ ¹	(1800)	1800	kg/m^3
Dicke d	0,2	0,3	m
Anzahl der Partialsummen m	80		—
Schichtübergangsfaktor η	0,01		—
Anfangstemperaturverteilung $T_0(x)$	20		$^\circ C$

Tabelle 5.2: Eingangswerte Dämmung und Beton

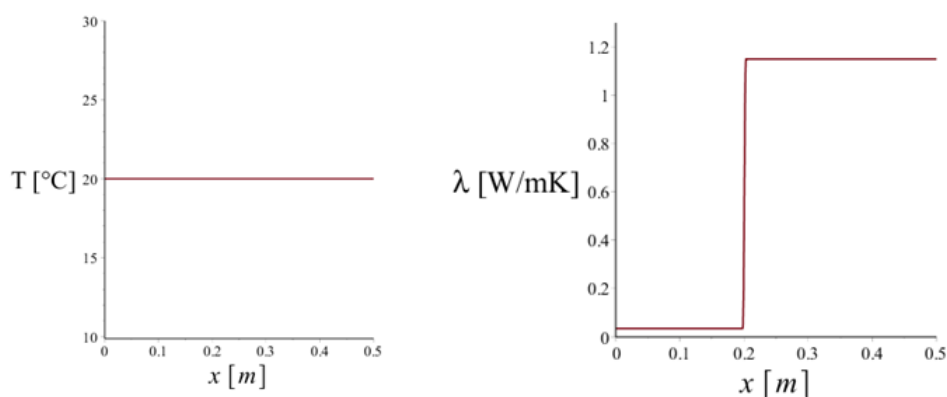


Abbildung 5.5: links Anfangstemperaturverteilung, rechts Funktion für Wärmeleitfähigkeit λ

Anhand der Eigenfunktionen, die in Abbildungen 5.6 dargestellt sind, kann man schon das Verhalten des Wärmestroms prognostizieren. Es ist zu erkennen, dass in der Schicht

¹Bemerkung: Die Werte in Klammern bedeuten, dass der Mineralwolle fiktiv die Dichte und Wärmespeicherkapazität von Beton zugeschrieben wird.

der Wärmedämmung mehr Wellen stehen als in der Betonschicht. Des weiteren ist festzustellen, dass die homogenen Randbedingungen erfüllt sind, was genauso verlangt wurde.

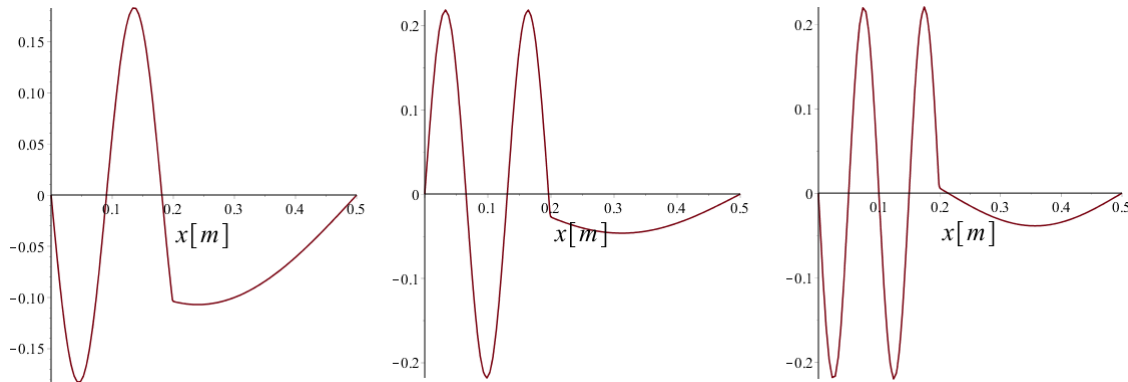


Abbildung 5.6: links Eigenfunktion zum 3. Eigenwert, mittig Eigenfunktion zum 4. Eigenwert, rechts Eigenfunktion zum 5. Eigenwert

Summiert man alle Produkte aus Eigenfunktionen und Zeitfunktionen auf, gemäß der Beschreibung im vorherigen Kapitel, so erhält man den zeitabhängigen Temperaturverlauf über die Bauteildicke (siehe Abbildung 5.7).

Die schlechte Ausbildung der Anfangswerte soll erstmal nicht weiter dramatisch sein. Bei einschichtigen Wänden waren die Ober- und Unterschwingungen für Dirichlet- Randbedingungen auch verhältnismäßig groß und man hat viele Reihenglieder benötigt, um vernünftige Resultate zu erhalten (siehe Abb. 3.1). Jedoch hat sich diese Auswirkung vollständig behoben, als inhomogene Randbedingungen aufgebracht wurden. Wählt man die Anfangsbedingung so, dass sie zum Zeitpunkt $t = 0$ die Randwerte erfüllt, sind kaum noch Störungen aus der Anfangsverteilung zu erwarten. Was die physikalische Interpretation dieser Grafik betrifft, ist der Temperaturverlauf genauso zu erwarten. Stellt man sich vor, über eine unendlich lange Zeit herrschten auf auf beiden Seiten eine Temperatur von 20°C , sodass sich eine Temperaturverteilung von Abb. 5.5 einstellt. Ebenso wie im Beispiel für einschichtige Wände nimmt man auf beiden Seiten der Wand die Wärmequellen vollständig weg. Dann passiert folgendes: Die Wärme strömt in Richtung der geringeren Temperatur, also über die Ränder hinaus. Es wird natürlich angenommen, dass sie dann gänzlich aus dem System entfernt wird. Da aber die Mineralwolle die Wärme langsamer heraus transportiert als der Beton, ist immer ein Unterschied im räumlichen Temperaturniveau festzustellen. Es wird sich aber kein lokaler Sprung in der Temperaturfunktion ergeben, da die Mineralwolle auf Grund der Temperaturunterschiede auch konsequent Wärme an den Beton übergibt, weswegen ein *Knick* zu beobachten ist. Zu jedem Zeitpunkt nach Änderung der Randbedingung enthält die Dämmschicht wesentlich mehr Wärme als der Beton. In Abb. 5.8 wurden nochmal zu festgesetzten Zeitpunkten Schnitte erzeugt. Dort lässt sich ablesen, dass der Beton schon nach ungefähr 400000 Sekunden ($\approx 4,6d$) die 1°C - Marke unterschreitet, während der Maximalwert in der Dämmschicht erst nach ca. 800000 Sekunden ($\approx 9,3d$) unter 1° fällt, also in etwa doppelt so lange.

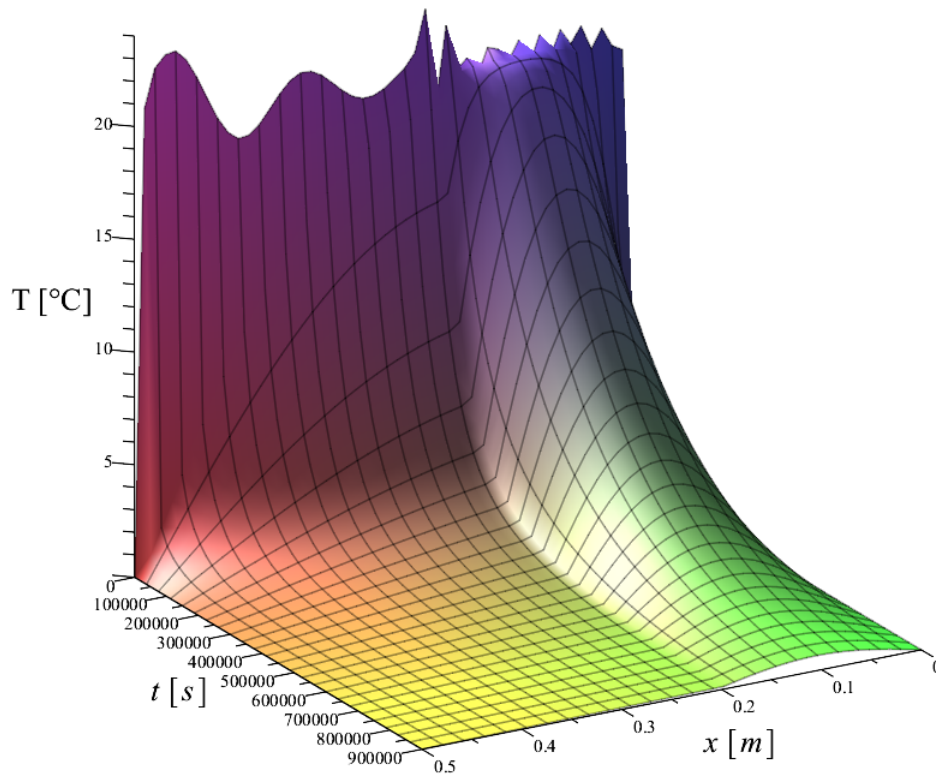


Abbildung 5.7: räumlich und zeitlich veränderliche Temperaturverteilung in den zwei Schichten

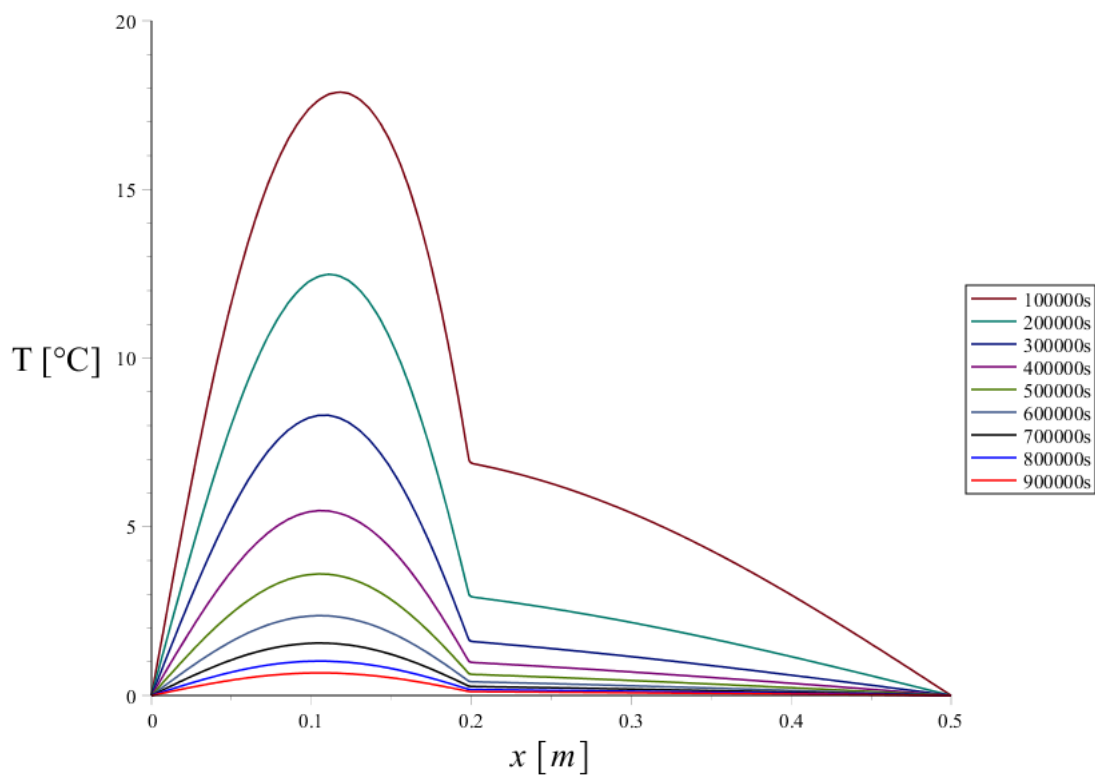


Abbildung 5.8: Temperaturverlauf für feste Zeiten t in zwei Schichten

Im nächsten Beispiel soll das gleiche System nochmal um eine weitere Schicht erweitert werden. Gewählt wurde mittelharter Kalkstein, mit einer etwas größeren Wärmeleitfähigkeit als der Beton. Tabelle 5.3 zeigt die gewählte Reihenfolge mit zugehörigen Eingangsgrößen. Auch hier wird wieder angenommen, dass die Rohdichte und die Wärmespeicherkapazität überall gleich ist.

Bezeichnung	Kalkstein	Mineralwolle	Beton	Einheit
Wärmeleitfähigkeit λ	1,4	0,035	1,15	W/mK
Wärmespeicherkapazität c_p	(1030)	(1030)	1030	J/kgK
Dichte ρ ²	(1800)	(1800)	1800	kg/m^3
Dicke d	0,2	0,2	0,3	m
Anzahl der Reihenglieder m	30			—
Schichtübergangsfaktor η	0,01			—
Anfangstemperaturverteilung $T_0(x)$	20			$^{\circ}C$

Tabelle 5.3: Eingangswerte Kalkstein, Dämmung und Beton

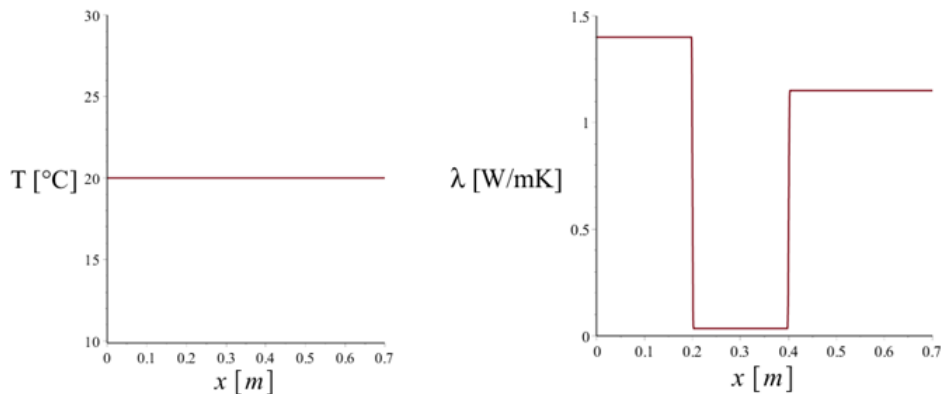


Abbildung 5.9: links Anfangstemperaturverteilung, rechts Funktion für Wärmeleitfähigkeit λ

Mit dieser Ausgangssituation wird wieder wie im vorherigen Beispiel die Temperaturverteilung in Abhängigkeit von der Zeit t und der Ortskoordinate x erzeugt (siehe Abb. 5.10). Im Bild 5.11 sind zu gleichmäßig festgehaltenen Zeitpunkten der zugehörige Temperaturverlauf über die Bauteildicke zu sehen.

²Bemerkung: Die Werte in Klammern bedeuten, dass der Mineralwolle sowie dem Kalkstein fiktiv die Dichte und Wärmespeicherkapazität von Beton zugeschrieben wird.

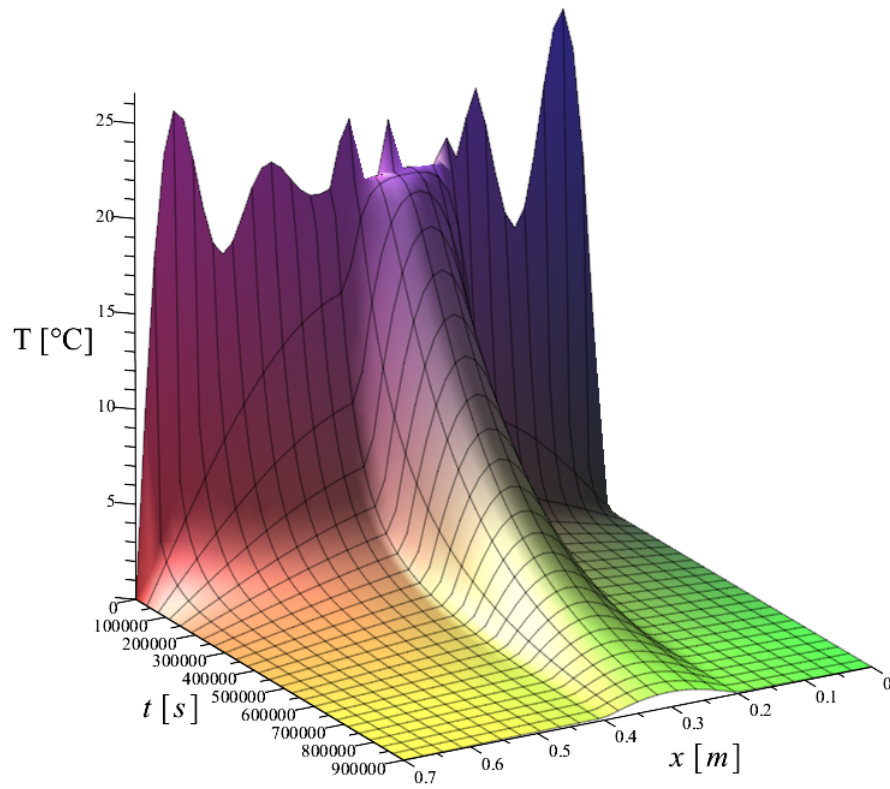


Abbildung 5.10: Räumlich und zeitlich veränderliche Temperaturverteilung in den drei Schichten

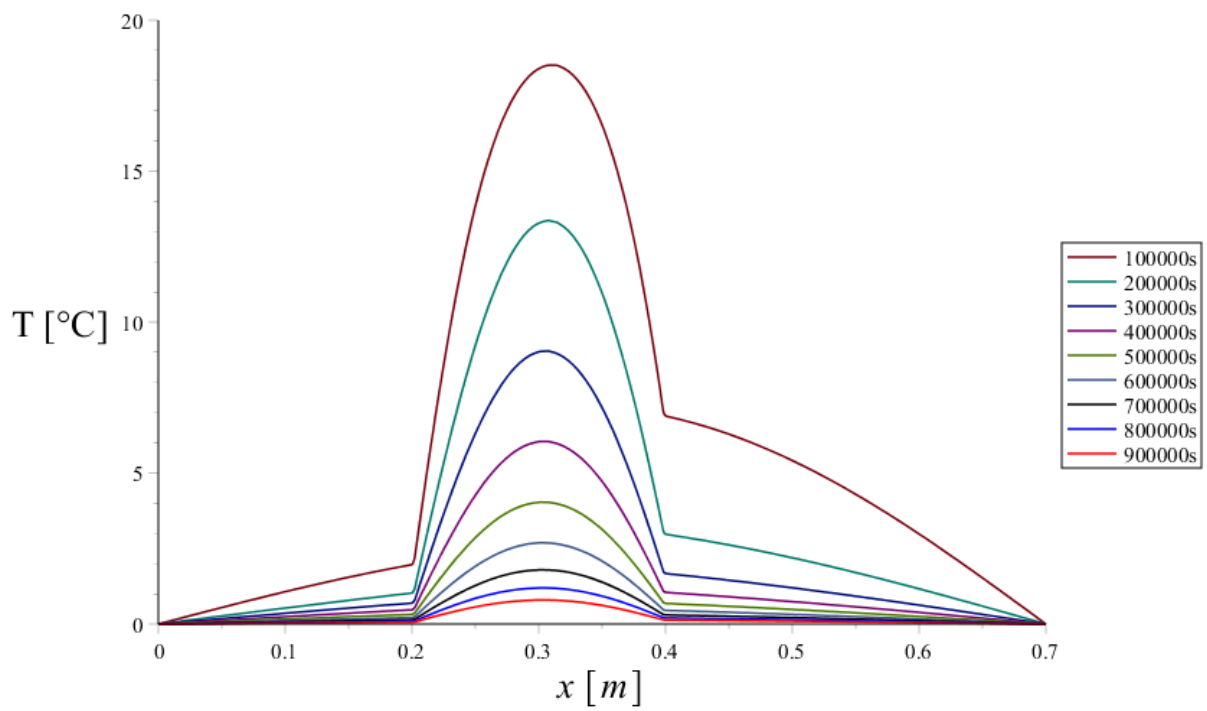


Abbildung 5.11: Temperaturverlauf für feste Zeiten t in drei Schichten

5.4 Genauigkeitsanalyse

Zu Beginn dieser Arbeit wurde sofort ein hoher Wert auf die Genauigkeit der Beschreibung des physikalischen Prozesses gelegt, weswegen auch eine analytische Lösung favorisiert wurde. Es gilt nun eine kurze Abschätzung abzugeben, was die Ungenauigkeiten betrifft, die in Kauf genommen wurden. Schließlich war man doch nicht in der Lage das Problem vollständig auf dem analytischen Weg zu lösen und musste sich mit einigen Näherungen zufrieden geben. Begonnen hat die Ungenauigkeit bei der Lösung des Eigenwertproblems mit der numerischen Integration. Gezwungenermaßen suchte man sich diskrete Knotenpunkte um die Variablen x und y festzusetzen. Das führte dann augenblicklich zu den angenäherten Eigenwerten. Für eine gewählte Anzahl von Partialsummenglieder m , erhielt man eine Folge von genau m Eigenwerten und m Eigenfunktionen. In Abb. 5.12 wurden für unterschiedliche m beispielhaft immer die zehnte Eigenfunktion herausgegriffen und grafisch dargestellt.³ Gleichzeitig sind für die verschiedenen m 's die Temperaturfelder zu sehen. Die blauen Punkte, welche in den Eigenfunktionen abgebildet sind, entsprechen genau den Einträgen aus den Eigenvektoren. Davon gibt es natürlich genau m Stück. Es ist eindeutig zu erkennen, dass die Eigenfunktionen Wellen abbilden, welche pro Schicht eine feste Wellenlänge und eine feste Amplitude ausweisen. Es ist hierbei gut zu beobachten, wie sich die Anzahl der Gitterpunkte, an denen die Funktionswerte (blaue Punkte) berechnet wurden, auf die Qualität der Eigenfunktionen sowie der Temperaturfelder auswirken. Würde man für $m = 80$ nicht die zehnte Eigenfunktion wählen, sondern zum Beispiel die sechzigste oder siebzigste, so wäre die Eigenfunktion, so ähnlich wie für $m = 20$ im Bild 5.12, genauso von schlechter Qualität. Das hat damit zu tun, dass für höhere Eigenfunktionen mehr Ober- bzw. Unterschwingungen auftreten (gerade für kleines λ), während die Anzahl der Funktionswerte gleich bleibt. Allerdings ist auf der rechten Seite von 5.12 auch zu erkennen, dass durch die wenigen Stützstellen vorrangig nur die Anfangsverteilung in Mitleidenschaft gezogen wird. Der weitere Verlauf der Temperatur zeigt sich mit fortschreitender Zeit weitgehend unbeeindruckt. Um dies nochmal zu unterstreichen, wurde in Abb. 5.13 für eine feste Zeit die Temperaturverteilung für $m = 20$ und $m = 80$ dargestellt. Wie man sieht, sind diese fast deckungsgleich.

³Es wurde das System aus dem Beispiel für zwei Wandschichten verwendet.

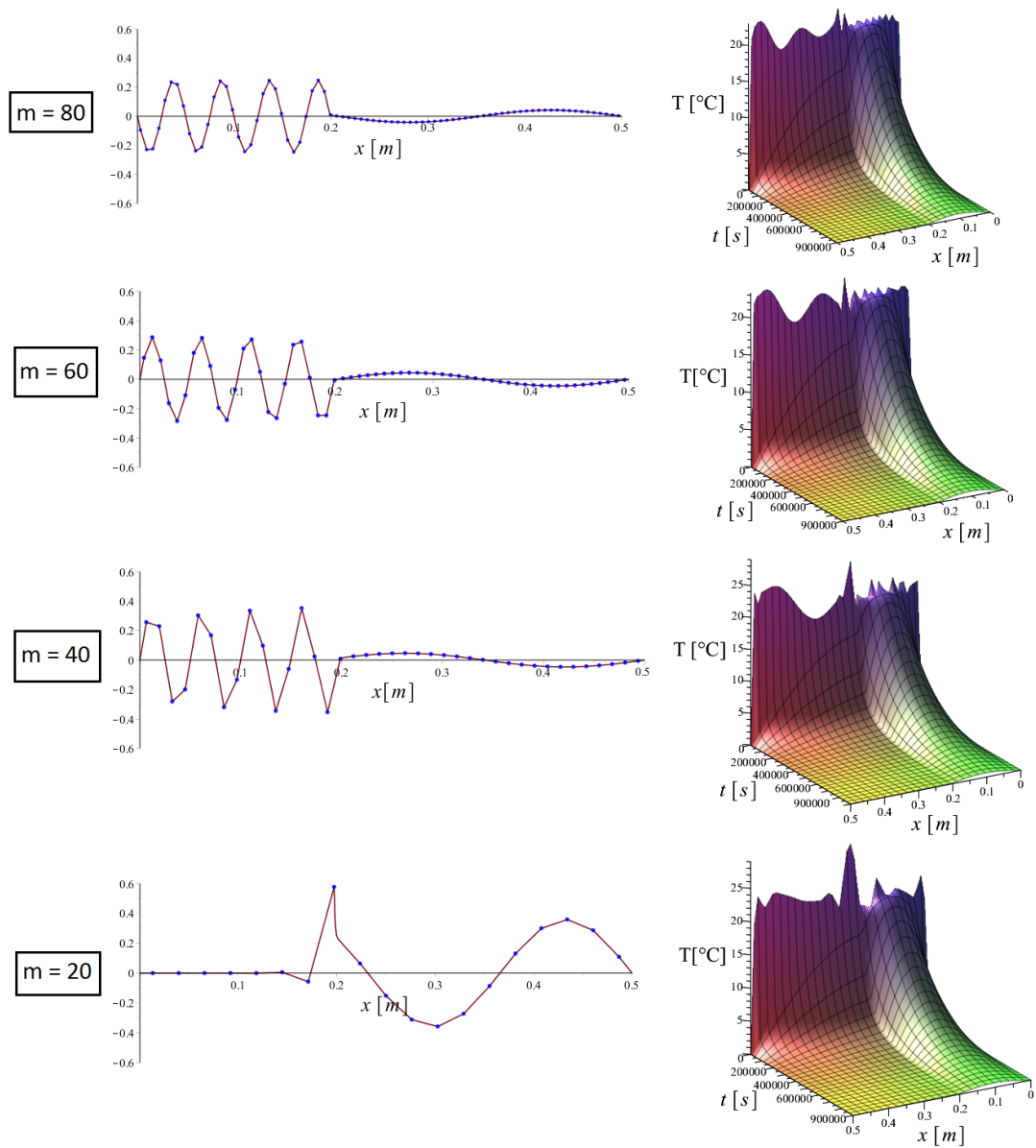


Abbildung 5.12: Links: Die 10. Eigenfunktion für verschiedenes m . Rechts: Temperaturfelder für verschiedenes m .

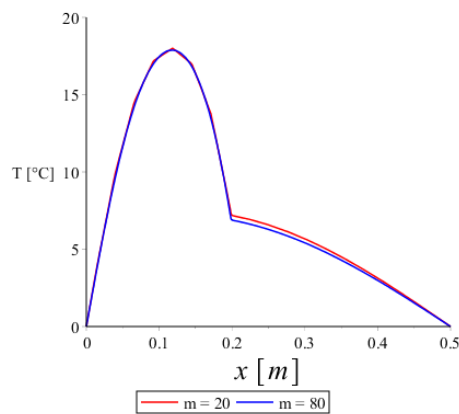


Abbildung 5.13: Zum Zeitpunkt $t = 100000$ s

Um den Ansatz mit veränderlichen Koeffizienten zu verifizieren, gibt es nun die Möglichkeit zu untersuchen inwieweit die Bedingung 4.2 für den Wärmeübergang zwischen zwei Schichten erfüllt ist. Dazu bildet man den Grenzwert an der Stelle des Schichtübergangs von links und von rechts. Die Differenz von beiden muss Null ergeben. In dem Fall für Übergangsbedingungen ist es natürlich nicht möglich, weil es praktisch keinen Sprung in der ersten Ableitung gibt. Eine Sprungrelation besteht dann, wenn $T(x, t)$ einen Knick aufweist. Das hingegen passiert nur für eine Unstetigkeit in der Wärmeleitfähigkeit, welche hier aber umgangen wurde, weil die Funktion an der relevanten Stelle verschmiert wurde. Demzufolge existiert kein Knick, sondern nur ein harter Übergang in der Temperaturfunktion. Das hat direkt zur Folge, dass die erste Ableitung keinen Sprung, sondern einen sehr steilen Verlauf annimmt. Man kann sich jedoch behelfen, wenn man die Ableitungen kurz vor den Stellen berechnet, zum Beispiel an den zwei Schichtübergangspunkten nach Abb. 4.3, und im Anschluss mit den zugehörigen Wärmeleitfähigkeiten multipliziert. Wenn man daraufhin die Differenz bildet, muss annähernd Null raus kommen. In Tabelle 5.4 wurde das für verschiedene Schichtübergangsfaktoren η und unterschiedliche Anzahl von Summanden der Partialsummen m in Relation gesetzt. Wie man sieht, ist man mit größeren Zeiten, kürzeren Schichtübergängen und mit mehr Partialsummen näher an der Null. Die großen Ungenauigkeiten für kurze Zeiten lassen sich durch die Störung erklären, die aus dem Anfangszustand resultieren.

	$\eta = 5\%$			$\eta = 1\%$		
	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3
$m = 40$	4,437	0,4232	0,0336	1,729	0,2058	0,0179
$m = 60$	3,326	0,448	0,0363	1,3448	0,1346	0,0117
$m = 80$	3,899	0,4251	0,0339	1,0592	0,0992	0,0087

Tabelle 5.4: Größenordnung des Fehlers an dem Schichtübergang in Abhängigkeit der Summanden, der Zeit und des gewählten Schichtübergangsfaktors. $t_1 = 10000s$, $t_2 = 300000s$, $t_3 = 800000s$

6 Zusammenfassung

Ohne alles zu wiederholen, sollen an dieser Stelle die Ergebnisse dieser Arbeit kurz zusammengefasst werden: In erster Linie war man bemüht, geeignete Ansätze zu finden, um einen Zugang zu gekoppelten Systemen zu erhalten. Entschieden hat man sich für einen Ansatz, der die Wärmeleitungsgleichung um ortsveränderliche Materialparameter erweitert. Damit war man in der Lage die unterschiedlichen Bauteilschichten mit ihrem spezifischen, thermischen Verhalten abzubilden, indem geeignete Funktionen gesucht wurden, die diese sprunghafte Änderung näherungsweise erfassten. Um Lösungen für die Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen Medien zu erhalten, ist ein Sturm-Liouville-Problem zu lösen gewesen, was letztlich auf eine Integralgleichung geführt hat. Hierbei musste die numerische Integration angewandt werden, die augenblicklich auf ein Gleichungssystem geführt hat, welches die Eigenwerte und die Eigenfunktionen der Sturm-Liouville Aufgabe geliefert hat. Schließlich ließen sich alle gefundenen partikulären Lösungen als Summe einer Reihe darstellen, was nichts anderes ergeben hat als die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit veränderlichen Koeffizienten. Nach Anwendung der Resultate auf ausgewählte Beispiele konnte man feststellen, dass die mathematischen Gleichungen die Realität recht gut abbilden. Es konnte außerdem gezeigt werden, dass die Ergebnisse die physikalischen Transmissionsbedingungen relativ gut approximieren können, wodurch man sich von ihrer Richtigkeit überzeugen lässt.

Vielleicht wird die erarbeitete Methodik nicht sofort Zugang zum alltäglichen Bausecht finden, jedoch ist die Aussicht sie für Forschungsangelegenheiten ausbaufähiger zu machen relativ hoch.

7 Ausblick

Diese Arbeit bietet die Grundlage für ein breites Band an weitergehenden Forschungsmöglichkeiten. Gerade weil das Potential der hier behandelten Methode mit veränderlichen Koeffizienten noch nicht im Ansatz ausgeschöpft ist. Schon bei einschichtigen Wänden war ersichtlich, dass es von großem Vorteil ist, frei wählbare Randbedingungen zuzulassen. Die Prinzipien der Superposition gelten natürlich auch für Differentialgleichungen mit inhomogenen Medien und können voll angewandt werden. Somit wäre man in der Lage auch bei geschichteten Wänden Funktionen für die Temperaturen auf beiden Wandseiten aufzubringen. Vorher müsste man natürlich noch die Differentialgleichung unter Berücksichtigung einer rechten Seite lösen, womit man auch gleichzeitig in der Lage ist, Wärmequellen- oder senken innerhalb einer beliebigen Schicht bzw. auch schichtübergreifend zu erfassen. Ist man nun soweit gekommen, wie im Kapitel für einschichtige Wände, kann man anfangen, das selbe Spiel mit Neumann- Randbedingungen durchzuführen. Dazu müsste man die Green'sche Funktion natürlich etwas abändern. Damit wäre man aber im Stande eine Linearkombination aus Temperatur und Temperaturgradient auf dem Rand vorzugeben, was nichts anderem als der Randbedingung 3. Art entspricht, womit der Wärmeübergang von Umgebung auf die Oberfläche beschrieben wäre.

Angenommen, diese umfangreiche Aufgabe wurde erfüllt, dann wären alle nötigen Hilfsmittel für die Anwendungen auf beliebige baupraktische Probleme und Fragestellungen bezüglich der Wärmeleitung in Wänden bereitgestellt. Natürlich nur für den eindimensionalen Fall. Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung

$$\rho(x, y, z) c_p(x, y, z) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \nabla \left(\lambda(x, y, z) \nabla T(x, y, z, t) \right) \quad (7.1)$$

gilt für alle drei Raumrichtungen. Im zweidimensionalen Fall lassen sich beispielsweise schon Wandöffnungen abbilden.

8 Anhang

Anhang 1

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{d} \left(\int_0^d \left[T_0(x) - (\varphi_1(0) + \frac{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}{d} x) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) dx \right) \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) e^{-a \frac{k^2 \pi^2}{d^2} t} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \left[-\frac{2}{\pi^2 k^2} \left(-\frac{\partial \varphi_2(\tau)}{\partial \tau} \pi (-1)^k k + \frac{\partial \varphi_1(\tau)}{\partial \tau} \pi k \right) e^{-a \frac{k^2 \pi^2}{d^2} (t-\tau)} \right] d\tau \right) \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \\
& + \varphi_1(t) + \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{d} x
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Anhang 2

$$X_1(x)$$

$$(\lambda(x)X'(x))' = 0 \tag{8.2}$$

$$X''(x) \lambda(x) + X'(x) \lambda'(x) = 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{X'(x)} \tag{8.3}$$

$$\frac{X''(x)}{X'(x)} = -\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \tag{8.4}$$

$$[\ln(X'(x))]' = [-\ln(\lambda(x))]' \quad \bigg/ \int dx \tag{8.5}$$

$$\ln(X'(x)) = \ln(\lambda^{-1}(x)) + C_0 \quad \bigg/ \exp() \tag{8.6}$$

$$X'(x) = \lambda^{-1}(x) e^{C_0} \quad \bigg/ \int dx \tag{8.7}$$

$$\underline{\underline{X_1(x) = \int \frac{C_1}{\lambda(x)} dx + C_2}} \tag{8.8}$$

Probe:

$$(\lambda(x) \left(\int \frac{C_1}{\lambda(x)} dx + C_2 \right)')' = 0 \quad \checkmark \tag{8.9}$$

$$X_2(x)$$

$$\text{Ansatz: } X_2(x) = u(x) X_1(x) \quad (8.10)$$

$$X_2'(x) = u'(x) X_1(x) + u(x) X_1'(x) \quad (8.11)$$

$$X_2''(x) = u''(x) X_1(x) + 2 u'(x) X_1'(x) + u(x) X_1''(x) \quad (8.12)$$

$$u''(x) X_1(x) + 2 u'(x) X_1'(x) + u(x) X_1''(x) + \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \left[u'(x) X_1(x) + u(x) X_1'(x) \right] = 0 \quad (8.13)$$

$$u''(x) X_1(x) + 2 u'(x) X_1'(x) + u(x) X_1''(x) + \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} u'(x) X_1(x) + \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} u(x) X_1'(x) = 0 \quad (8.14)$$

$$u(x) \left[\underbrace{X_1'(x) \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} + X_1''(x)}_{=0} \right] + \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} u'(x) X_1(x) + u''(x) X_1(x) + 2 u'(x) X_1'(x) = 0 \quad (8.15)$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} u'(x) X_1(x) + u''(x) X_1(x) + 2 u'(x) X_1'(x) = 0 \quad (8.16)$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} u'(x) X_1(x) + u''(x) X_1(x) + 2 u'(x) X_1'(x) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{X_1(x)} \quad (8.17)$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} u'(x) + u''(x) + 2 u'(x) \frac{X_1'(x)}{X_1(x)} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{u'(x)} \quad (8.18)$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} + \frac{u''(x)}{u'(x)} + 2 \frac{X_1'(x)}{X_1(x)} = 0 \quad (8.19)$$

$$[\ln(\lambda(x))]' + [\ln(u'(x))]' + 2 [\ln(X_1(x))]' = 0 \quad / \int dx \quad (8.20)$$

$$\ln(u'(x)) = -\ln(\lambda(x)) - 2 \ln(X_1(x)) + C_3^* \quad / \exp () \quad (8.21)$$

$$u'(x) = \frac{C_3}{\lambda(x) X_1^2(x)} \quad / \int dx \quad (8.22)$$

$$u(x) = \int \frac{C_3}{\lambda(x) X_1^2(x)} dx + C_4 \quad (8.23)$$

$$X_2(x) = u(x) X_1(x) \quad (8.24)$$

$$\underline{\underline{X_2(x) = \frac{1}{C_1} \left(\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \ C_1^2 C_4 + C_1 C_2 C_4 - C_3 \right)}} \quad (8.25)$$

Probe:

$$(\lambda(x) \left(\frac{1}{C_1} \left(\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \ C_1^2 C_4 + C_1 C_2 C_4 - C_3 \right) \right)')' = 0 \quad \checkmark \quad (8.26)$$

Anhang 3

Bedingung 1

$G(x,y)$ soll stetig in $[0, d] \times [0, d]$ sein. Der einzige Punkt, der kritisch sein könnte, ist für $x = y$. Das heißt man betrachtet die Schnittlinie der beiden Dreiecke Q_1 und Q_2 . Durch Subtraktion von $G_2(x, y)$ und $G_1(x, y)$ wird sichergestellt, dass der Grenzwert von Q_2 zur Diagonale und von Q_1 zu Diagonale identisch ist. Auf Grund der Symmetrie ist natürlich $G_2(y, y) - G_1(y, y) = 0$ erfüllt.

$$G(x, y) = \left\{ \frac{\left[-\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=0} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy \right] \left[-\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=d} + \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \right]}{\int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx} \right. \\ \left. \frac{\left[-\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=0} + \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \right] \left[-\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=d} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy \right]}{\int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx} \right\} \quad (8.27)$$

Bedingung 2

Die Funktion soll jeweils in den Dreiecken Q_1 und Q_2 zweimal stetig differenzierbar sein. Man kann versuchen die Green'sche Funktion zwei mal abzuleiten. Man erhält folgendes:

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = \left\{ \frac{-\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=0} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy}{\lambda(x) \int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx} \right. \\ \left. \frac{-\int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=d} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy}{\lambda(x) \int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx} \right\} \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{\left(- \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=0} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy \right) \lambda'(x)}{-\lambda^2(x) \int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx} \\ \frac{\left(- \int \frac{1}{\lambda(x)} dx \Big|_{x=d} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy \right) \lambda'(x)}{-\lambda^2(x) \int_0^d \frac{1}{\lambda(x)} dx} \end{cases} \quad (8.29)$$

Wie man sieht, existiert für $G(x, y)$ die erste und zweite Ableitung wenn $\frac{\partial \lambda(x)}{\partial x}$ existiert und $\lambda(x)$ keine Nullstellen hat. Das dies gilt, wurde aber bereits nachgewiesen. Aus der Differenzierbarkeit der beiden Funktionen $G_1(x, y)$ und $G_2(x, y)$ folgt automatisch, dass $G(x, y)$ auch außerhalb der Diagonale stetig ist. Somit ist Bedingung 1 und Bedingung 2 vollständig erfüllt.

Bedingung 3

Die Green'sche Funktion soll die beiden Randbedingungen $G(0, y)$ und $G(d, y)$ bei festem y erfüllen. Wird $x = 0$ gesetzt, ist eindeutig aus (8.27) ersichtlich, dass $G_2(x, y)$ zu Null wird, während $G_1(x, y)$ einen anderen Ausdruck ungleich Null annimmt. Durch eine Intervallbetrachtung wird jedoch klar, dass $G_1(x, y)$ nicht mehr relevant wird.

$$G(0, y) = \begin{cases} G_1(x, y) \neq 0 & 0 \leq y \leq \overbrace{x}^{=0} \leq d \\ G_2(x, y) = 0 & 0 \leq \underbrace{x}_{=0} \leq y \leq d \end{cases} \quad (8.30)$$

genauso verhält es sich für $x = d$, nur dass diesmal $G_2(x, y)$ uninteressant wird und $G_1(x, y)$ verschwindet.

$$G(0, y) = \begin{cases} G_1(x, y) = 0 & 0 \leq y \leq \overbrace{x}^{=d} \leq d \\ G_2(x, y) \neq 0 & 0 \leq \underbrace{x}_{=d} \leq y \leq d \end{cases} \quad (8.31)$$

somit erfüllt $G(x, y)$ die Randbedingungen.

Bedingung 4

Weiterhin ist vorausgesetzt, dass $G(x, y)$ die homogene Sturm-Liouville-Aufgabe $\lambda'(x)G'(x, y) + \lambda(x)G''(x, y) = 0$ für $x \neq y$ befriedigt. Es ist vielleicht nicht auf den ersten Blick erkennbar, aber löst man $G(x, y)$ wieder in die beiden Funktionen $G_1(x, y)$ und $G_2(x, y)$, was selbstverständlich wegen $x \neq y$ zulässig ist, und betrachtet man die Intervalle für sich

$$\lambda'(x)G'_1(x, y) + \lambda(x)G''_1(x, y) = 0 \quad (8.32)$$

$$\lambda'(x)G'_2(x, y) + \lambda(x)G''_2(x, y) = 0, \quad (8.33)$$

bedarf es keines Rechenprogramms, um die Richtigkeit der beiden Gleichungen einzusehen.

Bedingung 5

Die letzte Forderung ist die Sprungrelation, wonach $\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}$ für $x = y$ einen Sprung von $\frac{1}{\lambda(y)}$ aufweist. Um das zu beweisen, schaut man sich wieder die Diagonale von rechts und von links an und rechnet

$$G_1(y, y) - G_2(y, y) = \frac{-\int \frac{1}{\lambda(y)} dy \Big|_{y=0} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy}{\lambda(y) \int_0^d \frac{1}{\lambda(y)} dy} - \frac{-\int \frac{1}{\lambda(y)} dy \Big|_{y=d} + \int \frac{1}{\lambda(y)} dy}{\lambda(y) \int_0^d \frac{1}{\lambda(y)} dy}, \quad (8.34)$$

was sich noch folgendermaßen zusammenfassen und kürzen lässt

$$G_1(y, y) - G_2(y, y) = \frac{\overbrace{\int \frac{1}{\lambda(y)} dy \Big|_{y=d} - \int \frac{1}{\lambda(y)} dy \Big|_{y=0}}^{\int_0^d \frac{1}{\lambda(y)} dy}}{\lambda(y) \int_0^d \frac{1}{\lambda(y)} dy} = \frac{1}{\lambda(y)}. \quad (8.35)$$

Durch die Tatsache, dass der Zähler des Bruches nichts anderes als das bestimmte Integral ist, gelangt man augenblicklich zur Sprungrelation, die zu beweisen war.

Tabellenverzeichnis

2.1	Arten von Randbedingungen	4
3.1	homogene und inhomogene Randbedingungen	10
5.1	Eingangswerte für Beton	33
5.2	Eingangswerte Dämmung und Beton	36
5.3	Eingangswerte Kalkstein, Dämmung und Beton	39
5.4	Größenordnung des Fehlers an dem Schichtübergang in Abhängigkeit der Summanden, der Zeit und des gewählten Schichtübergangsfaktors. $t_1 =$ $10000s$, $t_2 = 300000s$, $t_3 = 800000s$	43

Abbildungsverzeichnis

2.1	Horizontaler Wärmestrom in x-Richtung. Links: Differentielles Volumenelement einer ebenen Wand. Mittig: Ein- und austretender Wärmestrom. Rechts: Temperaturverlauf in einer einschichtigen Wand im stationären Fall.	4
2.2	Temperaturverlauf in einer n -schichtigen Wand im stationären Fall	7
3.1	homogene DIRICHLET- Randbedingungen	12
3.2	homogene NEUMANN- Randbedingungen	14
3.3	Wärmequelle	15
3.4	Berechnungskonzept1	18
3.5	inhomogene Randbedingungen	19
3.6	Berechnungskonzept2	20
4.1	Wärmestrom in einer Wand bestehend aus drei Schichten unter instationären Bedingungen	22
4.2	Fourierreihenentwicklung	23
4.3	Sinusfunktion	23
4.4	Quadrat in (x,y)-Ebene, nachempfunden [3]	26
4.5	Mittelpunktregel	27
5.1	Annäherung eines trigonometrischen Polynoms an die Umgebungstemperatur	33
5.2	Wärmestrom durch eine 25cm starke Betonwand unter veränderlicher Außentemperatur und konstant gehaltener Innenraumtemperatur	34
5.3	Wärmestrom durch eine 150cm starke Betonwand unter veränderlicher Außentemperatur und konstant gehaltener Innenraumtemperatur	34
5.4	Direkter Vergleich zu beliebig gewählten Zeitpunkten	35
5.5	links Anfangstemperaturverteilung, rechts Funktion für Wärmeleitfähigkeit λ	36
5.6	links Eigenfunktion zum 3. Eigenwert, mittig Eigenfunktion zum 4. Eigenwert, rechts Eigenfunktion zum 5. Eigenwert	37
5.7	räumlich und zeitlich veränderliche Temperaturverteilung in den zwei Schichten	38
5.8	Temperaturverlauf für feste Zeiten t in zwei Schichten	38
5.9	links Anfangstemperaturverteilung, rechts Funktion für Wärmeleitfähigkeit λ	39
5.10	Räumlich und zeitlich veränderliche Temperaturverteilung in den drei Schichten	40
5.11	Temperaturverlauf für feste Zeiten t in drei Schichten	40
5.12	Links: Die 10. Eigenfunktion für verschiedenes m . Rechts: Temperaturfelder für verschiedenes m	42
5.13	Zum Zeitpunkt $t = 100000s$	42

Literatur

- [1] *Baustoffe und Bauprodukte – Wärme- und feuchtetechnische Eigenschaften – Tabellierte Bemessungswerte und Verfahren zur Bestimmung der wärmeschutztechnischen Nenn- und Bemessungswerte.* DIN EN ISO 10456. Mai 2010.
- [2] *Bauteile- Wärmedurchlasswiderstand und Wärmedurchgangskoeffizient- Berechnungsverfahren.* DIN EN ISO 6946. Juni 2015.
- [3] *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung, author=Wolfgang Walter, year=2000, publisher=Springer 7. Auflage, pages = 259-286.*
- [4] Technische Universität Graz. *Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten.* [Online; Stand 1. Juli 2017]. 2010. URL: https://www.opt.math.tugraz.at/~raindl/diffgl/folien/12_Lineare_Dgl_2_Ord_var.pdf.
- [5] Verein Deutscher Ingenieure. *VDI-Wärmeatlas : Berechnungsblätter für den Wärmeübergang : höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker.* Springer, 1997, Ec11.
- [6] Klaus Langeheinecke, Peter Jany und Gerd Thieleke. *Thermodynamik für Ingenieure.* Springer, 1993, S. 241–257.
- [7] G. Vainikko. *Vorlesung-Funktionsanalysis der Diskretisierungsmethoden.* 1974.
- [8] *Wärmetechnisches Verhalten von Bauteilen – Dynamisch-thermische Kenngrößen – Berechnungsverfahren.* DIN EN ISO 13786. Apr. 2008.
- [9] Deutscher Wetterdienst. *Archiv Stundenwerte.* [Online; Stand 12. Juli 2017]. URL: <http://www.dwd.de/DE/leistungen/klimadatendeutschland/klarchivstunden.html?nn=16102#buehneTop>.
- [10] Wikipedia. *Enthalpie — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* [Online; Stand 28. April 2017]. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Enthalpie&oldid=164208052>.
- [11] Wikipedia. *Erstarren (Baustoff) — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* [Online; Stand 25. Juni 2017]. 2016. URL: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Erstarren_\(Baustoff\)&oldid=152586078](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Erstarren_(Baustoff)&oldid=152586078).
- [12] Wikipedia. *Gibbssches Phänomen — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* [Online; Stand 1. Juli 2017]. 2017. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gibbssches_Ph%C3%A4nomen&oldid=165034042.
- [13] Wikipedia. *Latentwärmespeicher — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* [Online; Stand 25. Juni 2017]. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Latentw%C3%A4rmespeicher&oldid=163972520>.
- [14] Wikipedia. *Superposition (Mathematik) — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie.* [Online; Stand 28. Juni 2017]. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Superposition_\(Mathematik\)&oldid=164081689](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Superposition_(Mathematik)&oldid=164081689).

- [15] Wikipedia. *Wärmeleitung* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. [Online; Stand 1. Juli 2017]. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=W%C3%A4rmeleitung&oldid=165948515>.